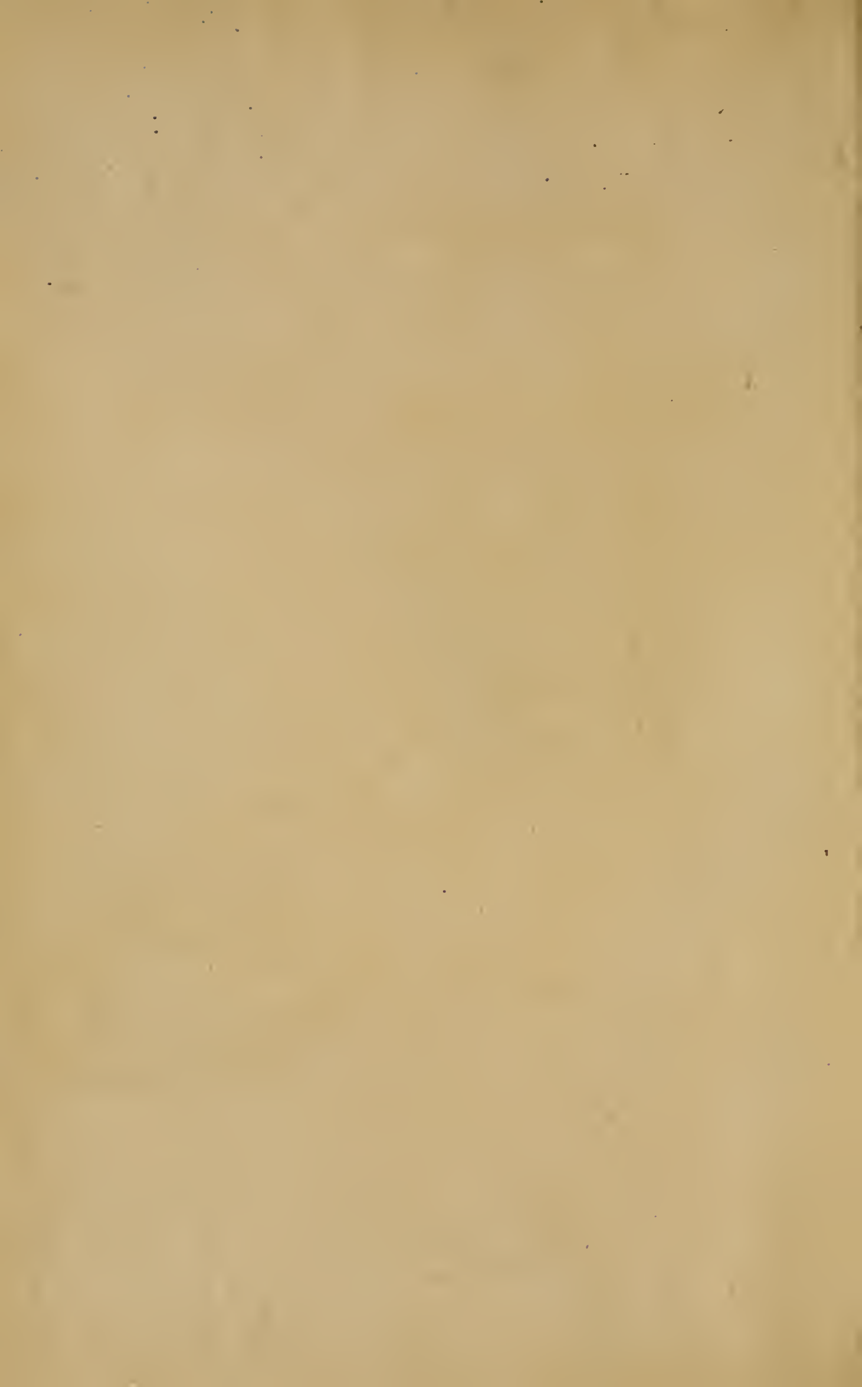




Vierteljahrsschrift

der

Naturforschenden Gesellschaft

in

ZÜRICH.

Redigirt

von

Dr. Rudolf Wolf,

Prof. der Astronomie in Zürich.

Einunddreissigster Jahrgang.

Zürich,

In Commission bei S. Höhr.

1886.

Inhalt.

Centrische Collineation $n$ter Ordnung und plane Collineation $n$ter Classe

von

Dr. Christian Beyel.

1.

Gegeben sei ein Punkt C und eine Fläche $\mathbf{L}^n$ von der $n$ten Ordnung. C liege nicht in $\mathbf{L}^n$.

Gegeben sei eine Ebene E und eine Fläche $\mathbf{L}_n$ von der $n$ten Classe. E berühren $\mathbf{L}_n$ nicht.

Wir setzen nun die Elemente der mehrfach gedachten Räume in folgende Beziehung zu einander:

Sei P ein Punkt eines Raumes und schneide der Strahl CP die Fläche $\mathbf{L}^n$ in n Punkten $L_1 \ldots L_n$ und bestimmen wir n Punkte $P_1' \ldots P_n'$ in der Weise, dass:

$$(CL_1 PP_1') = (CL_2 PP_2') = \ldots = (CL_n PP_n') = \varDelta$$

Sei P eine Ebene des Raumes, welche E in e schneide. Dann gehen durch e n Tangentialebenen $L_1 \ldots L_n$ an $\mathbf{L}_n$. Bestimmen wir n Ebenen $P_1' \ldots P_n'$ in der Weise, dass:

$$(EL_1 PP_1') = (EL_2 PP_2') = \ldots = (EL_n PP_n') = \varDelta$$

wobei $\varDelta$ eine constante Zahl bedeutet, so sind hierdurch

dem Punkte P n Punkte P′ | der Ebene P n Ebenen P'

zugeordnet. Eine derart festgesetzte Beziehung wollen wir als

centrische Collineation $n$ter Ordnung | plane Collineation $n$ter Classe

mit der Charakteristik $\varDelta$ bezeichnen und durch das Symbol

$(C\,\mathsf{L}^n\,\varDelta)$ | $(E\,\mathsf{L}_n\,\varDelta)$

ausdrücken.

Je nachdem wir ein Element P zu dem einen oder anderen Raume rechnen, correspondiren ihm n Elemente P′ oder n Elemente P^*. Von diesen sind je zwei — sagen wir $P'_n P^*_n$ dem P in Bezug auf ein L — in unserem Falle auf L_n — zugeordnet. Wir bezeichnen diese als doppelt conjugirt zu P. Da nach der Definition $(C L_n P P'_n) = \varDelta$ ist, so muss, wenn P zum gestrichenen Raume gerechnet wird und P^*_n zum correspondirenden hat, $(C L_n P P^*_n) = \frac{1}{\varDelta}$ sein. Folglich ist $(C L_n P^*_n P'_n) = \varDelta^2$.

Nun gibt es zu jedem Elemente P^* n doppelt conjugirte P′. Wir erhalten sie, indem wir die dem P^* entsprechenden im gestrichenen Raume — also $P'_1 \ldots P'_n$ — bestimmen. Jedes der letzteren — etwa P'_x — können wir als zum ungestrichenen Raume gehörend betrachten. Dann correspondirt ihm — in Bezug auf L_x — ein Element, das nach der oben eingeführten Bezeichnungsweise zu P^* doppelt conjugirt ist.

Fassen wir den zuletzt bewiesenen Schluss mit dem vorhergehenden zusammen, so folgern wir:

Die doppelt conjugirten Elemente einer Collineation $(C\,\mathsf{L}^n\,\varDelta)$ *resp.* $(E\,\mathsf{L}_n\,\varDelta)$ *stehen in einer Collineation* $(C\,\mathsf{L}^n\,\varDelta^2)$ *resp.* $(E\,\mathsf{L}_n\,\varDelta^2)$.

Bestimmen wir zu P ein correspondirendes Element P'_n in der Collineation $(C\,\mathsf{L}^n\,\varDelta)$ und zu diesem das entsprechende — P^*_n — in der Collineation $(C\,\mathsf{L}^n\,\varDelta^2)$, so wird P^*_n mit P'_n zusammenfallen, wenn $\varDelta^2 = 1$ ist. Es entspricht dann dem Elemente P, ob wir es zum gestrichenen oder ungestrichenen Systeme rechnen, im anderen das näm-

liche Element d. h. $P\,P_n'$ correspondiren sich vertauschbar. Die hierfür geltende Bedingung $\varDelta^2 = 1$ wird erfüllt, wenn $\varDelta = \pm 1$ ist. Für $\varDelta = +1$ sind die correspondirenden Räume in Deckung. Die Beziehung, welche für $\varDelta = -1$ stattfindet, bezeichnen wir als *centrische* resp. *plane Involution* der Räume.

2.

Nach dem Gesagten können wir uns darauf beschränken, für die Gebilde des ungestrichenen Raumes die correspondirenden zu untersuchen und wir wenden uns zu dieser Untersuchung.

Einer Geraden g entspricht in der Collineation

($C\,\mathbf{L}^n\,\varDelta$) eine Curve der $n$ten Ordnung, welche in der Ebene durch C *und g liegt.*

Jedem Punkte auf g correspondiren nach 1) n Punkte und offenbar liegt ihre Gesammtheit in der Ebene durch C und g. Dass der Ort dieser Punkte eine Curve $n$ter Ordnung ist, zeigen wir, indem wir ihn von jedem Punkte X des Raumes durch einen Kegel — K^n — der $n$ten Ordnung projiciren.

Schneide nämlich die Ebene durch C und g die Fläche $\mathbf{L}^n$ in der Curve L^n und sei s die Verbindungslinie von C mit X,

($E\,\mathbf{L}_n\,\varDelta$) ein Kegel $n$ter Classe, dessen Spitze der Schnittpunkt S von g mit E ist.

Jeder Ebene durch g correspondiren n Ebenen durch S. Diese umhüllen einen Ort. Dass derselbe ein Kegel $n$ter Classe ist, zeigen wir, indem wir ihn durch jede beliebige Ebene X des Raumes in einer Curve $n$ter Classe schneiden.

Sei L_{kn} der Tangentenkegel aus S an $\mathbf{L}_n$. Die Ebene X schneide ihn in der Curve L_n und treffe E in s. Dann wird durch s, L_n und $\varDelta$ eine Collineation ($s\,\mathrm{L}_n\,\varDelta$) bestimmt, welche folgendermassen charakteri-

ferner L_k^n der Kegel aus X über L_n, so wird durch s, L_k^n und Δ eine Collineation $(s L_k^n \Delta)$ bestimmt, welche folgendermassen charakterisirt ist. Einer Geraden durch X entsprechen n Gerade $h_1' \dots h_n'$. Sind $l_1 \dots l_n$ die Geraden, in welchen die Ebene durch h und s den Kegel L_k^n schneidet, so erhalten wir die h_n' durch Construction der Doppelverhältnisse $s\, l_n\; h\, h_n' = \Delta$.

In dieser Collineation $(s L_k^n \Delta)$ correspondirt einer Ebene P durch X ein Kegel der $n$ten Ordnung. Jede Ebene X' durch X enthält nämlich n Gerade h', welche Geraden in P correspondiren. Dies folgt so: Sei d die Schnittlinie der Ebenen X' und P und sei D die Ebene durch d und s, so construiren wir eine Ebene X derart, dass $(DXPX') = \Delta$ ist. Dann schneidet X den Kegel L_k^n in n Geraden $l_1 \dots l_n$. Die Ebenen durch diese und s treffen X' in n Geraden von der Art derer, welche wir oben mit h' bezeichneten; denn sie bilden je mit s, mit sirt ist: Einer Geraden h entsprechen n Gerade $h_1' \dots h_n'$. Bestimmen wir nämlich den Schnittpunkt von h mit s und seien die Tangenten von ihm an L_n mit $l_1 \dots l_n$ bezeichnet, so erhalten wir die h_n' durch Construction der Doppelverhältnisse: $(s\, l_n\; h\, h_n') = \Delta$.

In dieser Collineation $(s L_n \Delta)$ correspondirt einem Punkte P in der Ebene X eine Curve $n$ter Classe. Durch jeden Punkt X' in X gehen nämlich n Gerade h', welche Geraden durch P entsprechen. Dies folgt so: Ziehen wir PX' und treffe diese Linie s in D, so construiren wir auf P X' einen Punkt X von der Beschaffenheit, dass $(\mathrm{D\,X\,P\,X'}) = \Delta$ ist, Durch X gehen n Tangenten $l_1 \dots l_n$ an L_n. Diese schneiden s in n Punkten. Letztere mit X' verbunden ergeben n Linien von der Art derer, welche wir oben mit h' bezeichneten; denn sie bilden je mit s, mit einer Geraden l und mit einer Geraden durch P das Doppelverhältniss Δ.

einer Geraden l in X und einer Geraden in P das Doppelverhältniss $\varDelta$.

Nachdem wir auf diese Weise die Collineationen $(s\, L_k^n\, \varDelta)$ resp. $(s\, L_n\, \varDelta)$ charakterisirt haben, wenden wir uns wieder zu den Geraden g und ihren entsprechenden Gebilden in den Collineationen $(C\, \mathsf{L}^n\, \varDelta)$ und $E\, \mathsf{L}_n\, \varDelta)$ zurück. Wir construiren,

um X eine Collineation $(s L_k^n \varDelta)$. In derselben entspricht der Ebene durch X und g ein Kegel der n ten Ordnung. Dieser projicirt aber aus X den Ort, welcher g in der Collineation $(\mathrm{C}\, \mathsf{L}^n\, \varDelta)$ correspondirt. Da nun X beliebig gewählt war, so muss der erwähnte Ort von der n ten Ordnung sein.

in X die Collineation $(s\, L_n\, \varDelta)$. In derselben entspricht dem Schnittpunkte von g mit X eine Curve n ter Classe. Diese ist aber zugleich der Schnitt von X mit dem Orte, welcher g in der Collineation $(E\, \mathsf{L}_n\, \varDelta)$ correspondirt. Da X beliebig gewählt war, so ist also jener Ort von der n ten Classe.

Wir bemerken noch, dass in der Ebene durch C und g eine n deutige centrische Collineation durch C, L^n, $\varDelta$ vermittelt wird. Wir bezeichnen sie als eine Collineation $(\mathrm{C}\, \mathrm{L}^n\, \varDelta)$.*) Um den Punkt S wird durch $E\, L_{nk}\, \varDelta$ eine n deutige Collineation der n ten Classe — $(E\, L_{nk}\, \varDelta)$ festgelegt.

Es führen uns also die räumlichen Collineationen $(\mathrm{C}\, \mathsf{L}^n\, \varDelta)$ und $(E\, \mathsf{L}_n\, \varDelta)$ auf vier neue Collineationen.

*) Vgl. meine Abhandlung über: Centrische Collineation n ter Ordnung in der Ebene vermittelt durch Aehnlichkeitspunkte von Kreisen. Vierteljahrsschrift der naturforsch. Gesellschaft in Zürich. Bd. XXVI, pag. 297. 1881.

Bezeichnen wir diese als Collineationen 2. Stufe und die räumlichen als Collineationen 3. Stufe, so können wir die gegenseitigen Beziehungen aller dieser Collineationen dahin zusammenfassen:

Die Collineationen zweiter Stufe von gleicher Ordnung — also $(C L^n \Delta)$ *und* $(s L^n_k \Delta)$ *— sind zueinander perspectivisch. Desgleichen die Collineationen zweiter Stufe von derselben Classe — also* $(s L_n \Delta)$ *und* $(E L_{nk} \Delta)$. *Durch Schnitt und Scheinbildung können wir aus den Collineationen dritter Stufe die resp. Collineationen 2. Stufe ableiten.*

Die Behandlung der letzteren wird also mit der der ersteren erledigt.

3.

Einer Ebene P entspricht in der Collineation $(C L^n \Delta)$ *eine Fläche der n ten Ordnung* F^n.

Einem Punkte P *entspricht in der Collineation* $(E L_n \Delta)$ *eine Fläche der n ten Classe* F_n'.

Wir führen den Beweis nur für die *centrische* Collineation.

Eine Gerade g schneidet $F^{n'}$ in n Punkten; denn die Ebene durch C und g trifft P in einer Geraden, deren entsprechender Ort eine Curve n ter Ordnung ist. (2) Die n Schnittpunkte dieser Curve mit g sind zugleich die gemeinsamen Punkte von g mit $F^{n'}$. Also ist die letztere Fläche von der n ten Ordnung.

4.

Wir wollen nun in unserer Collineation einige ausgezeichnete Elemente hervorheben, welche wir später zur Durchführung der Construction entsprechender Gebilde benutzen.

Sich selbst entsprechend sind:

a) Das Centrum C und die Punkte von L^n.	Die Ebene E und die Tangentialebenen an L_n.*)
b) Die Geraden durch C.	Die Geraden in *E*.

Für die *entsprechenden Gebilde zu den unendlich fernen Elementen* gilt Folgendes:

Einem unendlich fernen Punkte Q von gegebener Richtung correspondiren *n*-Punkte $Q_1' \ldots Q_n'$. Sie sind mit *Q* durch die Relation verbunden:

$(C L_n \infty Q_n') = \Delta$. Daraus folgt $(C \infty L_n Q_n') = 1 - \Delta$ und

$$C L_n : C Q_n' = 1 - \Delta.$$

Einer unendlich fernen Gerade *q* entspricht eine Curve $Q^{n'}$ in der Ebene durch C und *q*. Schneidet letztere aus L^n die Curve L^n, so sagt das oben angeführte Verhältniss, dass Q'^n zu L^n centrisch ähnlich liegt im Verhältniss $1 - \Delta$.

Der unendlich fernen Ebene entspricht eine Fläche $\mathbf{Q}^{n'}$. Diese liegt zu L^n centrisch ähnlich im Verhältniss $1 - \Delta$.

Der unendlich fernen Ebene Q' entsprechen *n* Ebenen $Q_1' \ldots Q_n'$, welche zu *E* parallel sind. Bezeichnen wir mit $L_1 \ldots L_n$ die zu *E* parallelen Tangentialebenen an L_n, so werden die Abstände der Ebenen $E L_n Q_n'$ durch die Relation verbunden

$$(E L_n \infty Q_n') = \Delta$$

oder $\sin \widehat{E L_n} : \sin \widehat{E Q_n'} = 1 - \Delta$.

Einer unendlich fernen Geraden *q* entspricht ein Cylinder *n* ter Classe. Seine Mantelinien sind parallel der Schnittlinie einer Ebene von der Stellung *q* mit der Ebene *E*.

Unendlich fernen Punkten von gegebenen Richtungen correspondiren Flächen *n* ter Classe. Nach dem oben angeführten Verhältniss liegen diese Flächen affin zu L_n.

---

*) Den Flächen L^n resp. L_n correspondiren überdies noch Flächen der $n^2 - n$ ten Ordnung resp. Classe.

E ist die Collineationsebene der Affinität. Die Richtung des gegebenen Punktes ist die Affinitätsrichtung.

Wir heben die Fläche $\mathbf{Q}_n$ hervor, welche der normalen Richtung zur Ebene E entspricht.

5.

Unter Benutzung der zuletzt erwähnten Elemente beider Räume entwickeln wir die Methoden, welche zur Construction entsprechender Gebilde führen. Wir geben diese Methoden sowohl für die centrische wie die plane Collineation, weil die Dualität nicht in der sonst gewohnten Weise auftritt.

Sind $A_1 A_2$ zwei Punkte des einen Raumes und schneiden die Strahlen $C A_1$, $C A_2$ oder $\varrho_1\ \varrho_2$ die Fläche $\mathbf{L}^n$ in den Punkten $L_1^1 \ldots L_1^n$, $L_2^1 \ldots L_2^n$, so sollen mit $A_1^{1'} \ldots A_1^{n'}$, $A_2^{1'} \ldots A_2^{n'}$ die entsprechenden zu $A_1\ A_2$ in der Collineation $(C\,\mathbf{L}^n\,\varDelta)$ bezeichnet sein.

Ziehen wir nun die Sehnen, welche je einen Punkt $A_1^{x'}$ mit einem Punkte $A_2^{y'}$ verbinden, so erhalten wir n^2 Linien. Jeder derselben können wir die Verbindungslinie zweier Punkte L in der Weise

Seien $A_1\ A_2$ zwei Ebenen des einen Raumes, welche E in $e_1\,e_2$ schneiden. Durch letztere Linien sollen an $\mathbf{L}_n$ die Tangentialebenen $L_1^1 \ldots L_1^n$, $L_2^1 \ldots L_2^n$ gehen. $A_1^{1'} \ldots A_1^{n'}$ und $A_2^{1'} \ldots A_2^{n'}$ seien die entsprechenden zu $A_1\ A_2$ in der Collineation $(E\,\mathbf{L}_n\,\varDelta)$.

Je eine Ebene $A_1^{x'}$ schneidet eine Ebene $A_1^{y'}$. Wir erhalten auf diese Weise n^2 Schnittlinien. Jeder derselben können wir eine Schnittlinie von zwei Ebenen L zuordnen und zwar je der

zuordnen, dass der Geraden $A_1^{x'} A_2^{y'}$ die Gerade $L_1^{x'} L_2^{y'}$ entspricht. Sind $B_1 C_1 D_1$ ... und $B_2 C_2 D_2$ ... weitere Punkte auf ϱ_1 resp. ϱ_2, die mit S als Centrum zueinander perspectivisch liegen, so sollen die Geraden durch S die Punkte $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ ... auf $\varrho_1 \varrho_2$ verbinden. Dann sind diesen Verbindungslinien in Bezug auf $L_1^x L_2^y$ die Geraden zugeordnet, welche die Punkte $A_1^{x'} A_2^{y'}$, $B_1^{x'} B_2^{y'}$ ... verbinden. Wir können beweisen, dass letztere Verbindungslinien durch einen Punkt S^{xy} auf der Geraden CS gehen.

Es ist nämlich nach Construction $(C L_1^n A_1 A_1^{x'}) = \varDelta = (C L_2^y A_2 A_2^{y'})$ d. h. $A_1 A_2$ steht mit $A_1^{x'} A_2^{y'}$ in einer Collineation erster Ordnung. $L_1^x L_2^y$ ist Axe dieser Collineation, C ist das Centrum und $\varDelta$ ist die Charakteristik. In einer Collineation mit derselben Axe, demselben Centrum und der nämlichen Charakteristik stehen aber auch $B_1 B_2$ mit $B_1^{x'} B_2^{y'}$, $C_1 C_2$ mit $C_1^{x'} C_2^{y'}$ u. s. f. Ist dann in dieser Schnittlinie von $A_1^{x'} A_2^{y'}$ die Schnittlinie von $L_1^x L_2^y$.

Sind $B_1 C_1 D_1$.. und $B_2 C_2 D_2$.. weitere Ebenen durch e_1 resp. e_2, die zu einander perspectivisch liegen mit einer Ebene Σ als Perspectivebene, so sollen sich $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ ... in Σ schneiden. Dann sind den Schnittlinien $A_1 A_2$, $B_1 B_2$... je in Bezug auf die Schnittlinien von $L_1^x L_2^y$ Gerade zugeordnet, in denen sich die Ebenen $A_1^{x'} A_2^{y'}$, $B_1^{x'} B_2^{y'}$ ... schneiden. Wir können beweisen, dass die letzterwähnten Schnittlinien in einer Ebene Σ^{xy} liegen, welche durch den Schnitt von Σ mit E geht.

Es ist nämlich nach Construction $(E L_1^x A_1 A_1^{x'}) = \varDelta = (E L_2^y A_2 A_2^{y'})$ d. h. $A_1 A_2$ steht mit $A_1^{x'} A_2^{y'}$ in einer planen Collineation erster Classe. Die Schnittlinie von $L_1^x L_2^y$ ist Axe dieser Collineation. $\varDelta$ ist ihre Charakteristik und E ihre Leitebene. In derselben Collineation entsprechen sich aber auch die Schnittlinien der Ebenen

ser Collineation dem Punkte S der Punkt S^{xy} zugeordnet, so müssen sich die Geraden $A_1^{x'} A_2^{y'}$, $B_1^{x'} B_2^{y'} \ldots$ in S^{xy} schneiden, was zu beweisen war.

Ist S unendlich ferne in gegebener Richtung gelegen, so muss S^{xy} auf einer Geraden durch C liegen, welche diese Richtung hat.

In diesem Falle gehört zu den Geraden durch S auch diejenige, welche die unendlich fernen Punkte auf ϱ_1 und ϱ_2 verbindet. Die entsprechenden zu letzteren Punkten seien mit $Q_1^{1'} \ldots Q_1^{n'}$, $Q_2^{1'} \ldots Q_2^{n'}$ bezeichnet. Dann muss die Verbindungslinie der Punkte $Q_1^{x'} Q_2^{y'}$ ebenfalls durch S^{xy} gehen.

Kennen wir nun $A_1 A_1'$ und somit auch $Q_1^{1'}$, so ergibt sich aus dem Gesagten folgende Regel zur Construction der Punkte, welche einem beliebigen Punkte A_x entsprechen.

Wir bestimmen die Punkte, in welchen $C A_x$ *die Fläche* $\mathbf{Q}'^n$ *schneidet und projiciren dieselben aus* $Q_1^{1'}$ *auf eine* $B_1 B_2$, $B_1^{x'} B_2^{y'}$; $C_1 C_2$, $C_1^{x'} C_2^{y'} \ldots$

Entspricht in dieser Collineation der Ebene Σ die Ebene Σ^{xy}, so müssen sich in derselben $B_1^{x'} B_2^{y'}$, $C_1^{x'} C_2^{y'} \ldots$ schneiden.

Steht Σ normal zu E, so gehören zu den Ebenen durch e_1 und e_2 auch diejenigen, welche normal zu E sind. Ihnen correspondiren Ebenen, $Q_1^{1'} \ldots Q_1^{n'}$ und $Q_2^{1'} \ldots Q_2^{n'}$, welche Tangentialebenen an die unter 4 hervorgehobene Fläche $\mathbf{Q}^{n'}$ sind. Die Schnittlinie von 2 Ebenen $Q_1^{x'} Q_2^{y'}$ muss nach dem oben bewiesenen auf Σ^{xy} liegen.

Es ergibt sich daraus, wenn wir A_1 und $A_1^{1'}$, also auch $Q_1^{1'}$ kennen, folgende Regel zur Construction der Ebenen, welche einer beliebigen Ebene A_x correspondiren.

Wir bestimmen die Schnittlinie e_x *von* E *mit* A_x *und von* A_1 *mit* A_x. *Durch letztere Gerade legen wir eine Normalebene —* Σ *— zu* E, *welche* E *in* s *schneide. Dann zeichnen wir durch* e_x *die Tangentialebenen an die*

Parallele durch C *zu* $A_1 A_x$. *Ueber der so erhaltenen Reihe von Punkten* — S_{xy} — *bilden wir aus* $A_1^{1'}$ *ein Büschel. Seine Strahlen treffen* $C A_x$ *in den gesuchten Punkten.*

Fläche Q'^n *und schneiden dieselben mit* $Q_1^{1'}$. *Ueber dem erhaltenen Strahlenbüschel bilden wir aus s das Ebenenbüschel und schneiden dies mit* $A_1^{1'}$. *Wir gelangen auf diese Weise zu einem neuen Strahlenbüschel, das mit* e_x *die gesuchten Ebenen bestimmt.*

6.

Wir wollen diese Constructionsmethoden im Folgenden auf Curven und Flächen anwenden und dabei unsere Erörterungen auf die Collineation ($C\, L^n\, \Delta$) beschränken.

a) In der Ebene X durch C *liege eine Curve von der Ordnung m. Ihr entspricht eine Curve der Ordnung* mn — C'^{mn} — *welche in X gelegen ist.*

Wir beweisen diese Behauptung, indem wir auf die in 5 angegebene Weise zu C^m das entsprechende Gebilde construiren. Wir setzen voraus, dass zu A_1 ein entsprechender Punkt — $A_1^{1'}$ — und der zugehörige Punkt $Q_1^{1'}$ bekannt sei. Dann construiren wir den Kegel aus A_1 über C^m und zeichnen den Parallelenkegel — K^{m*} — aus C. Nun projiciren wir die Schnittcurve von X mit der Fläche $Q^{n'}$ — also eine Curve $n$ter Ordnung — aus $Q_1^{1'}$ und erhalten hierdurch einen Kegel $n$ter Ordnung — K^n. Letzterer und der Kegel K^{m*} durchdringen sich in einer Curve der mnten Ordnung — S^{mn}. Indem wir diese von $A_1^{1'}$ aus auf X projiciren, erhalten wir die Curve, welche in der Collineation ($C\, L_n\, \Delta$) der Curve C^m correspondirt. Also ist erstere wirklich von der Ordnung mn.

Bei diesem Constructionsverfahren ist A_1 beliebig ge-

wählt; mithin ist auch $A_1^{1'}$ ein beliebiger Punkt des Raumes. C'^{mn} erscheint daher aus jedem Punkte des Raumes als die Projection der Durchdringungscurve von 2 Kegeln der m ten resp. n ten Ordnung. Eine solche Curve hat bekanntlich im Allgemeinen keine Doppelpunkte und ihre Developpable ist von der Ordnung $m\,n\,(m+n-2)$. Daraus folgt, dass C'^{mn} keine Rückkehrpunkte besitzt und von der $m\,n\,(m+n-2)$ ten Classe ist. Wir kennen also von C'^{mn} drei Charaktere. Somit sind auch die übrigen bestimmt.

b) Sei C^m *eine Curve* m *ter Ordnung in einer Ebene* X, *welche* C *nicht enthält, so entspricht* C^m *in der Collineation* $(C\,L^n\,\varDelta)$ *eine Raumcurve —* C'^{mn} *— von der* $m\,n$ *ten Ordnung.*

C'^{mn} wird nämlich erhalten als Durchdringungscurve der Fläche n ter Ordnung, welche der Ebene X correspondirt (3), mit dem Kegel K^m aus C über C^m.

c) Sei C^m *eine Raumcurve der* m *ten Ordnung, so entspricht ihr in der Collineation* $(C\,L^n\,\varDelta)$ *eine Raumcurve der Ordnung* $m\,n$.

Wir weisen dies nach, indem wir C'^{mn} auf die in 5 angegebene Weise construiren. Sei wieder $A_1\,A_1^{1'}$ und $Q_1^{1'}$ eine in Bezug auf L_1 zusammengehörige Punktegruppe und sei X eine beliebige Ebene, welche durch C und A_1 geht, so schneidet diese C^m in m Punkten — $P_1 \ldots P_m$ —. Diese verbinden wir durch die Linien $a_1 \ldots a_m$ mit A_1 und ziehen zu letzteren durch C die Parallelen $a_1^* \ldots a_m^*$. Ferner legen wir durch C nach $P_1 \ldots P_m$ die Geraden $c_1 \ldots c_m$. Jede derselben trifft Q_n' in n Punkten Q'. Projiciren wir dann aus $Q_1^{1'}$ die n Punkte Q', welche in c_1 liegen, auf a_1^*, so erhalten wir n Punkte S^{xy}. Projiciren wir endlich diese aus $A_1^{1'}$ auf a_1, so gelangen wir zu n Punkten von C'^{mn}.

Es liegen mithin in der Ebene X — also in jeder Ebene durch CA_1 — entsprechend den m Geraden $C\,mn$ Punkte von C'^{mn}. Nehmen wir daher auf CA_1 einen beliebigen Punkt X an und verbinden wir ihn mit den jetzt gefundenen Punkten von C'^{mn}, welche auf den Ebenen durch CA_1 liegen, so erhalten wir einen Kegel von der Ordnung $m\,n$.

Nun war $A_1\,A'_1\,Q_1^{1'}$ eine beliebige zu L_1 gehörende Punktegruppe. Nehmen wir daher den Punkt X willkürlich an und bestimmen wir auf der Geraden CX eine solche Punktegruppe, so erhalten wir mit ihrer Hülfe einen Kegel der $m\,n$ten Ordnung über C'^{mn}. Es wird also C'^{mn} von jedem Punkte des Raumes aus durch einen Kegel der Ordnung $m\,n$ projicirt. Also ist C'^{mn} selbst von dieser Ordnung.

d) Einer Fläche F^m *der* m*ten Ordnung correspondirt in der Collineation* $(C\,L^n\,\varDelta)$ *eine Fläche von der Ordnung* $m\,n$ — $F^{mn'}$.

Eine beliebige Gerade g trifft nämlich $F^{mn'}$ in $m\,n$ Punkten; denn die Ebene durch C und g schneidet F^m in einer Curve $m$ter Ordnung. Dieser entspricht eine Curve der Ordnung $m\,n$ — C'^{mn} — welche mit g $m\,n$ Punkte gemein hat. Sie sind die Schnittpunkte von g mit F'^{mn}.

Sei F ein Punkt auf F^m und F'_x sein entsprechender in Bezug auf L_x, so ist nach $1: (C\,L_x\,F\,F'_x) = \varDelta$, mithin $(C\,F\,L_n\,F'_x) = 1 - \varDelta$. Wir schliessen daraus:

Ist F'^{mn} *eine Fläche, welche in einer Collineation* $(C\,L^n\,\varDelta)$ *der Fläche* F^m *correspondirt, so entspricht auch* F'^{mn} *der Fläche* L^n *in der Collineation* $(C\,F^m\,1 - \varDelta)$ *d. h. wir können die Fläche, zu der wir die entsprechende suchen, mit der Leitfläche* L^n *vertauschen, wenn wir gleichzeitig* $\varDelta$ *in* $1 - \varDelta$ *übergehen lassen.*

Ist speciell F'^n die Fläche, welche einer Ebene P entspricht, so schliessen wir aus dem vorstehenden Satze, dass F'^n mit L^n in einer Collineation erster Ordnung steht, deren Leitfläche P und deren Charakteristik $1 - \Delta$ ist. Das Entsprechen von F'^n und L^n ist dann derart, dass wir F'^n auch als die entsprechende Fläche zu C in einer planen Collineation erster Classe betrachten können, deren feste Ebene P und deren Charakteristik $1 - \Delta$ ist. Daraus folgt, dass die Fläche n ter Ordnung, welche in der Collineation $(C L^n \Delta)$ einer Ebene entspricht, von derselben Classe ist, wie die Leitfläche dieser Collineation.

Indem wir eine analoge Betrachtung für die in einer Ebene gelegene Collineation $(C L^n \Delta)$ anstellen, können wir sagen: Die Curve n ter Ordnung, welche in dieser Collineation einer Geraden entspricht, hat dieselben Charaktere wie L^n.

e) Ist F^m ein Kegel mit der Spitze, S so entsprechen dieser n Punkte auf C S. Den Erzeugenden des Kegels correspondiren Curven n ter Ordnung, welche dieselben Charaktere haben wie die Schnittcurven von Ebenen durch $\overline{CS}$ mit L^n. In jeder solchen Ebene liegen m derartige Curven der Ordnung n, welche durch n feste Punkte auf C S gehen.

f) Ist F^m eine Regelfläche mit den Leitcurven $L_1^{m_1}$, $L_2^{m_2}$ $L_3^{m_3}$ (wobei $m_1 . m_2 . m_3 = 2m$ ist), so correspondiren den Geraden von F^m Curven C'^n, deren Charaktere dieselben sind, wie die der Curven, welche eine Ebene durch C und die resp. Geraden aus der Fläche L^n schneidet. Die Curven C'^n treffen die resp. Curven $L_1'^{m_1 n}$, $L_2'^{m_2 n}$, $L_3'^{m_3 n}$, welche $L_1^{m_1}$, $L_2^{m_2}$, $L_3^{m_3}$ correspondiren, je in n Punkten, die auf einer Geraden durch C liegen.

7.

Bei der Construction der im vorhergehenden besprochenen geometrischen Gebilde treten Punkte S^{xy} auf, deren Ort wir für den Fall näher untersuchen wollen, in welchem A_1 ein Punkt des geometrischen Gebildes ist, zu dem wir das correspondirende suchen.

a) Sei C^m eine Curve der m ten Ordnung in einer Ebene X, welche nicht durch C geht und sei A_1 ein Punkt von C^m, $A_1^{1'}$ $Q_1^{1'}$ seien seine zugehörigen in Bezug auf L_1 — so erhalten wir C'^{mn} auf folgende Weise: Wir construiren den Kegel aus C über C^m — K_c^m. Derselbe durchdringt $\mathbf{Q}'^n$ in einer Curve D^{mn}, auf der $Q_1^{1'}$ liegt. Projiciren wir D^{mn} aus $Q_1^{1'}$ auf eine Ebene X^* durch C, welche zu X parallel ist, so wird der projicirende Kegel, dessen Spitze ein Punkt von D^{mn} ist, von der Ordnung $mn - 1$ sein. Also schneidet er X^* in einer Curve S^{mn-1}. Der Kegel über ihr aus $A_1^{1'}$ durchdringt K_c^m in der Curve C'^{mn}, welche C^m in der Collineation $(C\,\mathsf{L}^n\,\Delta)$ correspondirt. Die Curve S^{mn-1} ist der Ort der bei dieser Construction auftretenden Punkte S^{xy}. Also liegen diese Punkte in einer Curve der $mn - 1$ ter Ordnung, deren Ebene durch C geht.

b) Ist C^m eine Curve m ter Ordnung, welche in einer Ebene X durch C liegt, so specialisirt sich die in *a)* skizzirte Construction dahin, dass X^* mit X zusammenfällt und dass an Stelle der Kegel ebene Strahlenbündel treten, deren Strahlen in einer ganz bestimmten Zuordnung zu einander stehen. Aus dieser schliessen wir, dass auch in diesem Falle die Punkte S^{xy} auf einer Curve der $mn - 1$ ten Ordnung liegen.

c) Liege A_1 auf der Fläche F^m, zu welcher wir die entsprechende suchen, so können wir zeigen, dass die bei Construction der entsprechenden Fläche — F'^{mn} — auf-

tretenden Punkte S^{xy} in einer Fläche der $mn - 1$ ten Ordnung — Σ^{mn-1} — gelegen sind. Alle S^{xy} nämlich, welche sich in einer Ebene X durch C befinden, erfüllen eine Curve der $mn - 1$ ten Ordnung. Dies folgt so: Denken wir durch A_1 eine Ebene X^* gelegt, welche zu X parallel ist, so schneidet X^* die Fläche $\mathbf{F}^m$ in einer Curve F^m. Der Kegel über ihr aus C durchdringt $\mathbf{Q}'^n$ in einer Curve D^{mn}, auf welcher sich $Q_1^{1'}$ befindet. Projiciren wir daher D^{mn} aus $Q_1^{1'}$ auf X, so erhalten wir eine Curve der $mn - 1$ ten Ordnung als Ort der Punkte S^{xy} in X.

8.

Handelt es sich darum, von einer Collineation zu einer solchen der gleichen Ordnung (resp. Classe) überzugehen, so gilt folgender Satz, dessen Nachweis sich aus dem in 1 Gesagten leicht ergibt:

Sei gegeben eine centrische Collineation ($C\,\mathbf{L}^n\,\varDelta$), *so können wir dieselbe von einem Centrum* C_1 *aus durch eine centrische Collineation erster Ordnung mit einer Leitebene* E *und einer Charakteristik* $\varDelta_1$ *transformiren. Dann erhalten wir eine neue centrische Collineation. Sie hat die Charakteristik* $\varDelta$. *Centrum und Leitfläche sind die correspondirenden zu* C *und* $\mathbf{L}^n$ *in der Collineation* ($C_1\,E\,\varDelta_1$).

Ein dualer Satz gilt für die plane Collineation ($E\,\mathbf{L}_n\,\varDelta$).

Versuchen wir eine Transformation einer Collineation n ter Ordnung resp. Classe aus einem Centrum resp. einer Ebene durch eine Collineation p ter Ordnung resp. Classe, so erhalten wir np deutige Beziehungen. Einem Punkte entsprechen np Punkte auf einer Curve p ter Ordnung, welche durch p feste Punkte geht u. s. f. Im Allgemeinen werden derartige Beziehungen nur dann bestimmt sein, wenn wir jenen Curven p ter Ordnung noch $\frac{p(p+3)}{2} - p$

Bedingungen auferlegen. Wir unterlassen es hier auf diese Art von Verwandtschaften näher einzutreten.

9.

Unter den Specialisirungen unserer Collineationen erwähnen wir diejenigen, für welche C unendlich ferne in gegebener Richtung sich befindet (Affinitäten) und diejenigen, für welche E unendlich ferne ist (centrische Aehnlichkeiten).

Ferner heben wir den Fall hervor, in welchem:

C auf $\mathbf{L}^{n}$ liegt	E eine Tangentialebene an $\mathbf{L}_{n}$ ist.

Dann entsprechen

einem Punkte P ausser C noch $n-1$ Punkte. Einer Geraden, einer Ebene, einer Fläche $\mathbf{F}^{m}$ correspondiren resp. eine Curve n ter, eine Fläche n ter, eine Fläche mn ter Ordnung, welche durch C gehen.	einer Ebene P ausser E noch $n-1$ Ebenen. Einer Geraden, einem Punkte. einer Fläche $\mathbf{F}_{m}$ correspondiren resp. ein Kegel n ter, eine Fläche n ter, eine Fläche $m\,n$ ter Classe, die von E berührt werden.
Die Geraden durch C entsprechen sich selbst. Enthält eine Ebene den Punkt C, so entspricht ihr eine Fläche der $n-1$ ten Ordnung. Einer Fläche $\mathbf{F}^{m}$ durch C correspondirt eine Fläche der Ordnung $m\,n-1$.	Liegt eine Gerade in E, so entspricht sie sich selbst. Einem Punkte in E correspondirt eine Fläche der n-1 ten Classe. Einer Fläche — $\mathbf{F}_{m}$ — welche von E tangirt wird, entspricht eine Fläche der $m\,n-1$ ten Classe.

Schliesslich weisen wir noch darauf hin, dass das Auftreten eines p fachen Punktes C resp. einer p fachen

Ebene E Specialisirungen veranlasst, welche den letzterwähnten analog sind.

10.

Bis jetzt haben wir stillschweigend angenommen, dass die Elemente der Räume, welche wir in Beziehung setzten, reell seien. Lassen wir diese Annahme fallen, so bedürfen die in 1 gegebenen Definitionen einer erweiterten Intpretation, welche wir im Folgenden für die centrische Collineation $(C\,\mathsf{L}^n\,\Delta)$ durchführen wollen.

Gehen wir von einem imaginären Punkte P_i aus, der auf der reellen Geraden ϱ durch C gelegen ist, so wird P_i durch eine elliptische Involution und durch einen bestimmten Sinn gegeben.*) Paare dieser Involution seien $x\,x_1$, $y\,y_1$. Trifft dann ϱ die Leitfläche L^n in den n reellen Punkten $L_1 \dots L_n$, so construiren wir n Punktegruppen $x'y'x'_1y'_1$ in der Weise, dass

$$(CL_n XX'_n) = \Delta = (CL_n YY'_n) = (CL_n X_1 X_1^{n'}) = (CL_n Y_1 Y_1^{n'}).$$

Die Aufeinanderfolge der Elemente in diesen Punktegruppen muss die gleiche sein, wie die der Punkte $X Y X_1 Y_1$. Daher bestimmt jede solche Punktegruppe eine elliptische Involution. Diese definirt zwei imaginäre Punkte. Bezeichnen wir mit P'_{in} denjenigen dieser Doppelpunkte, für welchen der Sinn der definirenden Involution mit dem Sinne der Involution übereinstimmt, durch welche P_i bestimmt ist, so können wir P'_{in} als den correspondirenden zu P_i in der Collineation $(C\,\mathsf{L}^n\,\Delta)$ betrachten. Es sind somit dem imaginären Punkte P_i n bestimmte imaginäre Punkte P'_i zugeordnet.

---

*) Vgl. v. Staudt: Beiträge zur Geometrie der Lage. Nr. 116.

Trifft eine reelle Gerade ϱ durch C die Fläche L^n in einer Anzahl — sagen wir in p — bestimmten imaginären Punkten und sind zu einem reellen Punkte P auf ϱ die correspondirenden zu finden, so werden p von ihnen bestimmte imaginäre Punkte sein. Wir erhalten sie nach dem in 6 d) ausgesprochenen Gesetze der Vertauschung, indem wir zu den p imaginären Punkten die entsprechenden in Bezug auf P suchen. Wir müssen also in einer Collineation (C, P, $1-\varDelta$) zu den reellen Elementen, welche die p imaginären Punkte definiren, die entsprechenden construiren. Diese definiren p imaginäre Punkte P'_i, welche wir als die correspondirenden zu P auffassen.

Endlich untersuchen wir den Fall, in welchem P_i ein bestimmter imaginärer Punkt auf einer Geraden ϱ durch C ist und in welchem ϱ die Fläche L^n in p bestimmten imaginären Punkten trifft. Dann correspondiren im Allgemeinen dem Punkte P_i in Bezug auf die p imaginären Punkte L_i p imaginäre Punkte P'_i. Um dies zu zeigen, schicken wir folgende Bemerkung voraus: Sind P und L_1 zwei reelle Punkte auf ϱ, so erhalten wir bekanntlich einen Punkt P', welcher mit $C L_1$ und P das Doppelverhältniss $(CL_1 P P') = \varDelta$ bildet, indem wir durch C eine beliebige Gerade h ziehen. Auf ihr zeichnen wir zwei Punkte $C_1 C_2$ so, dass $CC_1 : CC_2 = \varDelta$ ist. Ziehen wir sodann durch L_1 eine Gerade h^*, welche parallel zu h ist und schneide h^* die Verbindungslinie C_1 P in P^*, so trifft $C_2 P^*$ die Gerade ϱ in P'. Indem wir annehmen, dass imaginäre Punkte, welche durch eine analoge Construction verbunden sind, ebenfalls ein Doppelverhältniss $\varDelta$ bilden, construiren wir $C_1 P_i$. Dies ist eine imaginäre Gerade erster Art. Sie wird durch die imaginären Geraden h^*, welche durch die Punkte L_i gehen und zu h

parallel sind, in p bestimmten imaginären Punkten geschnitten. Projiciren wir diese aus C_2 auf ϱ, so erhalten wir p imaginäre Punkte P_i', welche dem imaginären Punkte P_i correspondiren.

Wir sehen aus dem Gesagten, dass unsere Collineation $(C\,\mathsf{L}^n\,\varDelta)$ auch dann einen bestimmten Sinn hat, wenn L^n eine durch reelle Elemente definirte imaginäre Fläche ist. Wir unterlassen es hier, in diesem Falle auf die allgemeine Correspondenz von Gebilden näher einzutreten.

Zur Geometrie des Imaginären.

Imaginär-Projectionen.

Mit Tafel — Fig. 1.

1.

Sei i eine imaginäre Gerade erster Art mit dem reellen Punkte S. Sie werde durch eine elliptische Strahleninvolution — J — und durch einen bestimmten Sinn gegeben.*) Wir machen i zur Axe einer centrischen Collineation erster Ordnung.**) B sei die Ebene, C das Centrum und $\varDelta$ die Charakteristik dieser Collineation. Dem entsprechend bezeichnen wir sie mit dem Symbol $(C\,i\,\varDelta)$.

Um die Construction entsprechender Elemente der Collineation $(C\,i\,\varDelta)$ durchzuführen, senden wir für dieselbe eine räumliche Darstellung voraus. Wir betrachten C als Fusspunkt einer Normalen — c — zur Ebene B und be-

---

*) Vgl. v. Staudt: Beiträge zur Geometrie der Lage. — Lüroth: Das Imaginäre in der Geometrie, mathematische Annalen, Bd. VIII, p. 145. — Fiedler, Darst. Geometrie, II. Aufl., p. 509 ff.

**) Vgl. meine Abhandlung über centrische und plane Collineation.

stimmen auf c zwei Punkte — $C_1 C_2$ — in der Weise, dass $C C_1 : C C_2 = \Delta$ ist. i fassen wir als Spur einer imaginären Ebene — J — auf, welche zur Ebene B senkrecht steht. Sind dann $x x'$, $y y'$ entsprechende Paare der Involution J, so wird J durch eine elliptische Ebeneninvolution bestimmt, deren Scheitelkante die Tafelnormale s in S ist und deren entsprechende Ebenenpaare resp. durch $x x'$, $y y'$ gehen. (Fig. 1.)*)

Wir vermitteln nun die Correspondenz der Gebilde in der Ebene B in folgender Weise:

Sei ϱ_s die Verbindungslinie von C mit S und sei P_1 ein Punkt derselben, so ziehen wir $C_1 P_1$ (Fig. 1). Diese Gerade treffe s im Punkte P. Dann trifft $C_2 P$ die Ebene B in einem Punkte P_2, für den : $C P_1 : S P_1 = C C_1 : S P$ und $C P_2 : S P_2 = C C_2 : S P$ ist. Also folgt dass $(C S P_1 P_2) = \Delta$ sein muss.

P_2 ist mithin der entsprechende zu P_1 in der Collineation $(C\, i\, \Delta)$.

Indem wir in analoger Weise verfahren, um zu einem Punkte P_1, welcher nicht in ϱ_s liegt, den correspondirenden zu bestimmen, haben wir mit $C_1 P_1$ die imaginäre Ebene J zu schneiden. Wir erhalten hierdurch einen imaginären Punkt P_i. Die Verbindungslinie desselben mit C_2 trifft die Ebene B in einem imaginären Punkte — P_{2i} — welcher der entsprechende zu P_1 ist. Wir schliessen daher: *Einem reellen Punkte — P_1 — correspondirt in der Collineation $(C\, i\, \Delta)$ im allgemeinen ein imaginärer Punkt, welcher mit P_1 auf einer reellen Geraden durch C liegt. Den reellen Punkten auf ϱ_s entsprechen reelle Punkte.*

Sei P_{1i} ein imaginärer Punkt in der Ebene B. welcher auf einer reellen Geraden ϱ_p durch C liegt, so er-

*) Die Darstellung ist axonometrisch.

halten wir seinen entsprechenden, indem wir $C_1 P_{1i}$ ziehen. Diese Gerade trifft J in einem imaginären Punkte P_i. $C_1 P_i$ schneidet B in einem imaginären Punkte P_{2i}, welcher P_{1i} correspondirt. Hier kann nun der Fall eintreten, dass der reelle Träger von P_i durch C_2 geht. Dann schneidet dieser B in einem reellen Punkte P_2, welcher P_{1i} entspricht. Es wird dies immer stattfinden, wenn P_i ein imaginärer Punkt ist, welcher einem reellen in einer Collineation $\left(C\, i \frac{1}{\varDelta}\right)$ correspondirt.

Nehmen wir an P_{1i} sei ein imaginärer Punkt, welcher nicht auf einer durch C gehenden Geraden liegt, so construiren wir seinen entsprechenden, indem wir $C_1 P_{1i}$ ziehen. Den imaginären Punkt — P_i — welchen diese Gerade aus J schneidet, verbinden wir mit C_2. $P_i C_2$ trifft B in P_{2i} und wir sagen:

Einem imaginären Punkte correspondirt in der Collineation (C$\,i\,\varDelta$) im Allgemeinen ein imaginärer Punkt.

Zur Construction des zuletzt erwähnten Punktes P_{2i} machen wir noch folgende Bemerkung:

Sei p_1 der reelle Träger von P_{1i}. Dann betrachten wir $C P_{1i}$ als Spur einer imaginären Ebene P_i, welche zur Ebene B senkrecht steht. P_i schneidet die Ebene J in einer imaginären Geraden erster Art. Diese liegt in einer Ebene — G — welche normal zur Ebene B ist.

G schneidet B in dem reellen Träger — g — des Punktes, in welchem die Geraden i und $C P_{1i}$ sich treffen. Die Ebene $C_1 p_1$ aber schneidet aus G den reellen Träger — p — des Punktes P_i. Legen wir durch p und C_2 eine Ebene, so trifft diese B in dem reellen Träger — p_2 — des Punktes P_{2i}. Darnach müssen sich g und p_2 im Schnittpunkte von p mit der Ebene B, d. h. in einem

Punkte — P — von p_1 treffen. Bezeichnen wir die Gerade P C mit ϱ_p, so folgt weiter, dass $(\varrho_p\, g\, p_1\, p_2) = \Delta$ ist.

Haben wir also in der Ebene B den reellen Träger — g — des Schnittpunktes von C P_{1i} und i gezeichnet, so können wir nach der letzteren Relation p_2 bestimmen. Diese Gerade trifft C P_{1i} im Punkte P_{2i}. Wir ziehen aus diesen Constructionen einen Schluss für entsprechende Punkte P_{1i}, P_{2i}. Sei ϱ_i eine imaginäre Gerade erster Art, welche durch C geht und in der Ebene B liegt. Sie schneidet i in einem imaginären Punkte, der sich auf einer reellen Geraden g befinde. Es ist somit jeder imaginären Geraden ϱ_i eine reelle Gerade g zugeordnet. Drehen wir nun um einen reellen Punkt P von g eine Gerade p_1, so schneidet jede ihrer Lagen aus ϱ_i einen imaginären Punkt P_{1i}. Sein correspondirender liegt in ϱ_i und auf einer reellen Geraden p_2, welche durch P geht. Wir sagen also:

Zwei imaginäre Punkte, welche sich in der Collineation (C i Δ) *entsprechen, liegen auf einer imaginären Geraden —* ϱ_i *— durch* C. *Ihre reellen Träger schneiden sich in der reellen Geraden* g, *welche* ϱ_i *zugeordnet ist. Sie bilden mit dem Strahle nach* C *und mit* g *das Doppelverhältniss* Δ.

In der Geraden g fällt P_{1i} mit P_{2i} zusammen, d. h. der Schnittpunkt von g mit i entspricht sich selbst.

Gehen wir zu den *Geraden der Ebene B* über, so ergibt sich sofort:

Einer reellen Geraden — g_1 *— correspondirt in der Collineation* (C i Δ) *eine imaginäre Gerade erster Art* g_{2i}. Letztere ist die Projection aus C_2 von der Linie, in welcher die Ebene $C_1 g_1$ die Ebene J schneidet. Also liegt der reelle Punkt von g_{2i} in ϱ_s und $g_1\, g_{2i}$ schneiden sich in i.

Sei g_{1i} eine imaginäre Gerade erster Art in der Ebene B. Der reelle Punkt von g_{1i} sei P_1. Wir erhalten in der Collineation ($C\,i\,\Delta$) das entsprechende Gebilde zu g_{1i}, indem wir durch C_1 und g_{2i} die Ebene G_i legen. Diese schneidet J in einer imaginären Geraden zweiter Art — g_i. Durch diese und den reellen Punkt C_2 geht eine imaginäre Ebene. Sie trifft die Ebene B in der imaginären Geraden g_{2i} — welche g_{1i} correspondirt.

Vereinfacht wird die Bestimmung von g_{2i}, wenn der reelle Punkt — P_1 — von g_1 in ϱ_s liegt. Dann befindet sich auch P_2 in ϱ_s.

Tritt hier der weitere specielle Fall ein, dass g_2 durch P_2 geht, so correspondirt diese Gerade in der Collineation ($C\,i\,\Delta$) der imaginären Geraden g_{1i}. Dann ist g_{1i} die entsprechende zu einer reellen Geraden in der Collineation $\left(C\,i\,\frac{1}{\Delta}\right)$. Wir fassen also das gesagte dahin:

Einer imaginären Geraden erster Art — g_{1i} — correspondirt im Allgemeinen in der Collineation ($C\,i\,\Delta$) eine imaginäre Gerade erster Art. Den imaginären Geraden aber, welche reellen Geraden in der Collineation $\left(C\,i\,\frac{1}{\Delta}\right)$ entsprechen, correspondiren diese reellen Geraden in der Collineation ($C\,i\,\Delta$).

2.

In analoger Weise wie jetzt die Collineation ($C\,i\,\Delta$) können wir alle die Collineationen erster Ordnung behandeln, bei denen ein, zwei oder drei Bestimmungsstücke imaginär sind.

Sei zuerst das Centrum ein imaginärer Punkt — C_i — so errichten wir in C_i zur Ebene B die Normale C_i. Diese ist eine imaginäre Gerade erster Art, deren reeller Punkt die zu B senkrechte Richtung ist.

Auf C_i nehmen wir einen Punkt — C_{1i} — beliebig an. Sein reeller Träger sei c_1 und schneide den reellen Träger — c — von C_i im Punkte C. Nun construiren wir in c_i einen Punkt C_{2i} von der Art, dass sein reeller Träger — c_2 — durch C geht und mit $c_1 c$ durch die Relation $\frac{\operatorname{tg} c c_1}{\operatorname{tg} c c_2} = \varDelta$ verknüpft ist. Benutzen wir dann die Punkte $C_{1i} C_{2i}$ in analoger Weise wie die Punkte $C_1 C_2$ bei der Collineation $(C\, i\, \varDelta)$, so vermitteln wir die eindeutige Correspondenz der Collineation $(C_i\, i\, \varDelta)$.

Soll aber die Axe — s — der Collineation reell sein, so bestimmen wir die Punkte C_{1i}, C_{2i} so, dass ihre reellen Träger — $c_1 c_2$ — durch den Schnittpunkt — C — von s mit c gehen. s betrachten wir als Spur einer Ebene S, welche zur Ebene B senkrecht steht. Damit ist der Weg gezeigt, welcher die Correspondenz der Collineation $(C_i\, s\, \varDelta)$ vermittelt.

Sei zweitens die Charakteristik der Collineation imaginär — etwa gleich $\varDelta_i = \frac{m\,i}{n}$ — so errichten wir wieder in C ein Perpendikel — c — zur Ebene B. Auf ihm nehmen wir einen Punkt C_2 so an, dass $C C_2 = n$ ist. Ferner bestimmen wir einen Punkt C_{1i}, für welchen $C C_{1i} = m\,i$ ist. C_{1i} wird also ein imaginärer Punkt sein. Wir finden ihn, indem wir C als Mittelpunkt einer elliptischen Involution in c betrachten. Sei $-m^2$ die Potenz dieser Involution, so erhalten wir ein weiteres Paar — $X X'$ — nach der Relation $C X . C X' = -m^2$. Die Doppelpunkte haben den Abstand $m\,i$ von C. Je nachdem nun $\varDelta_i$ positiv oder negativ ist, wird C_{1i} derjenige Doppelpunkt der in Rede stehenden Involution sein, welcher in der Richtung $C C_2$ oder in der Richtung $C_2 C$ liegt. Damit ist C_{1i} eindeutig definirt und in Analogie

der Bezeichnungsweise für reelle Punkte können wir sagen: $\frac{CC_{1i}}{CC_2} = \Delta_i$.

Lassen wir jetzt $C_{1i}\,C_2$ an Stelle von $C_1\,C_2$ in der Collineation $(C\,i\,\Delta)$ treten, so gelangen wir zu einer Collination $(C\,i\,\Delta_i)$. Ersetzen wir die imaginäre Axe durch eine reelle — s — so werden wir zu einer Collineation $(C\,s\,\Delta_i)$ geführt.

Wir wenden uns zu einer *Collineation erster Ordnung, für welche Centrum und Charakteristik imaginär sind,* also zu einer Collineation $(C_i\,s\,\Delta_i)$. Ihre Correspondenz vermitteln wir mit Hülfe der oben besprochenen Collineationen und stützen uns dabei auf folgenden allgemeinen Satz*): Sei gegeben eine centrische Collineation erster Ordnung $(C_1\,s_1\,\Delta)$. Denken wir uns die entsprechenden Gebilde dieser Collineation von einem Centrum C_2 aus durch eine centrische Collineation $(C_2\,s_2\,\Delta_2)$ transformirt, so erhalten wir entsprechende Gebilde einer neuen centrischen Collineation. Diese hat Δ zur Charakteristik; Axe und Centrum sind die Gerade s und der Punkt C, welche C_1 und s_1 in der Collineation $(C_2\,s_2\,\Delta_2)$ correspondiren.

Indem wir diesen Satz benutzen, gehen wir von einer Collineation $(C_1\,s\,\Delta_i)$ aus. Auf ihrer Axe s nehmen wir einen Punkt C_2 an und ferner den reellen Punkt S einer imaginären Geraden i. Transformiren wir jetzt $(C_1\,s\,\Delta_i)$ durch eine Collineation $(C_2\,i\,\Delta_2)$, so erhalten wir eine neue Collineation mit der Charakteristik Δ_i. Die Axe dieser Collineation ist die entsprechende zu s in der Collineation $(C_2\,i\,\Delta_2)$ d. h. die Gerade s. Das Centrum ist der Punkt

*) Vgl. Nr. 8 meiner oben citirten Abhandlung über centrische und plane Collineation.

C_i, welcher dem Punkte C_1 in der Collineation $(C_2\, i\, \varDelta_2)$ entspricht.

Geben wir nun die Collineation $(C_i\, s\, \varDelta_i)$ durch ihre Bestimmungsstücke, so nehmen wir C_2 im Schnittpunkte des reellen Trägers c von C_i mit s an. Ferner wählen wir in c einen Punkt C_1 und in s einen Punkt S. Dann construiren wir auf c den Punkt L_i nach der Relation $(C_2\, L_i\, C_1\, C_i) = \varDelta_2$, wo $\varDelta_2$ eine beliebige Zahl ist. Die Gerade $L\, S_i$ sei i. Damit sind die 3 Collineationen $(C_1\, s\, \varDelta_i)$, $(C_2\, i\, \varDelta_2)$ und $(C_i\, s\, \varDelta_i)$ festgelegt. Soll in der letzteren z. B. zur reellen Geraden g_1 die entsprechende gezeichnet werden, so construiren wir zu g_1 die correspondirende g'_{1i} in der Collineation $(C_2\, i\, \varDelta_2)$. Zu g'_{1i} bestimmen wir die entsprechende — g'_{2i} — in der Collineation $(C_1\, s\, \varDelta_i)$. Die correspondirende g_{2i} zu g'_{2i} endlich in der Collineation $(C_2\, i\, \varDelta_2)$ entspricht der Geraden g_1 in der Collineation $(C_i\, s\, \varDelta_i)$.

Es bleibt uns noch übrig die *centrische Collineation erster Ordnung* zu besprechen, *für welche Centrum, Axe und Charakteristik imaginär sind*, also die Collineation $(C_i\, i\, \varDelta_i)$.

Da gehen wir von einer Collineation $(C_1\, i_1\, \varDelta_i)$ aus. Transformiren wir dieselbe in einer Collineation $(C\, s\, \varDelta_i)$, so gelangen wir zu einer neuen Collineation mit der Charakteristik $\varDelta_i$. Centrum dieser Collineation ist der Punkt — C_i — welcher dem Punkte C_1 in der Collineation $(C\, i\, \varDelta_i)$ correspondirt; Axe ist diejenige imaginäre Gerade — i — welche i_1 in der letzterwähnten Collineation entspricht. Also ist die gefundene Collineation — $(C_i\, i\, \varDelta_i)$ — von der gesuchten Art.

Sei die Collineation $(C_i\, i\, \varDelta_i)$ durch ihre Bestimmungsstücke gegeben, so nehmen wir eine beliebige reelle Gerade s an. Der reelle Träger — c — von C_i schneide

dieselbe in C. Dann construiren wir in c zwei Punkte $C\,C_1$ nach der Relation $(C\,S\,C_1\,C_i) = \varDelta_i$. Zu diesem Zwecke bestimmen wir in der Involution, welche den Punkt C_i definirt, zu S den entsprechenden. Diesen betrachten wir als Punkt C und errichten in ihm eine Normale zu B. Auf ihr construiren wir zwei Punkte — $C_{1i}\,C_2$ — nach der Relation $\frac{C\,C_{1i}}{C\,C_2} = \varDelta_i$. Verbinden wir nun C_{1i} mit C_i, so erhalten wir eine imaginäre Gerade erster Art, deren reeller Punkt P sei. Derselbe muss auf der Verbindungslinie der Punkte liegen, welche C in den Involutionen entsprechen, die C_i und C_{1i} definiren. Daraus folgt, dass P auf der Normalen durch S zur Ebene B liegt. Projiciren wir daher P aus C_2 auf c, so erhalten wir einen Punkt C_1, welcher der Bedingung $(C\,S\,C_1\,C_i) = \varDelta_i$ genügt. C_i ist also der entsprechende zu C_1 in der Collineation $(C\,s\,\varDelta_i)$. In derselben Collineation entspreche der imaginären Geraden i die imaginäre Gerade i_1. Damit sind drei Collineationen festgelegt und zwar $(C_1\,i_1\,\varDelta_i)$, $(C\,s\,\varDelta_i)$ und $(C_i\,s\,\varDelta_i)$.

Gebilde, welche sich in der zuletzt angeführten Collineation entsprechen, thun dies auch in der zuerst erwähnten. Vermittelt werden diese Correspondenzen durch die Collineation $(C\,s\,\varDelta_i)$.

Wir haben jetzt sämmtliche Collineationen erster Ordnung untersucht, bei denen ein, zwei oder drei Bestimmungsstücke imaginär sind. Nun ist aber noch der Fall denkbar, dass die *Charakteristik* einer Collineation *eine complexe Zahl* — sagen wir $\frac{\alpha + m_i}{n} = \varDelta_c$ sei. Dieser führt uns zu den Collineationen $(C\,s\,\varDelta_c)\,(C\,i\,\varDelta_c)$; $(C_i\,s\,\varDelta_c)\,(C_i\,i\,\varDelta_c)$. Ihre räumlichen Darstellungen ergeben sich resp. aus denen für $(C\,s\,\varDelta_i)\,(C\,i\,\varDelta_i)$; $(C_i\,s\,\varDelta_i)\,(C_i\,i\,\varDelta_i)$ dadurch, dass wir die

Darstellung des Punktes C_{1i} ändern. Wir müssen nämlich diesen Punkt in der normalen Richtung zu *B* um die Grösse α verschieben. Eine analoge Veränderung ergibt sich auch für den Punkt C_{2i}, wenn $\varDelta = \frac{\alpha + m_i}{\beta + n_i}$.

Indem wir dazu übergehen mit Hülfe der besprochenen Collineationen aus reellen Figuren der Ebene *B* imaginäre abzuleiten, wollen wir die für die Collineationen gegebenen räumlichen Darstellungen der Kürze halber als *Imaginärprojectionen**) bezeichnen.

Damit haben wir festgesetzt, was unter der Imaginärprojection von $(C\, i\, \varDelta)$, $(C\, i\, \varDelta_i)$... zu verstehen ist.

Imaginäre ebene Dreiecke.

Mit Tafel — Figur 2 und 3.

Wir gehen von einer Collineation $(C\, s\, \varDelta_c)$ aus und untersuchen in derselben die Figur, welche einem reellen *Dreieck* — E F G resp. *e f g* — entspricht. Diese hat — (vergleiche Imaginärprojectionen 2) — folgende Eigenschaften: Sie ist ein *Dreieck, dessen Ecken* — $E_i\, F_i\, G_i$ — imaginäre Punkte sind, welche mit E F G *auf Geraden*

---

*) Einen speciellen Fall der besprochenen Correspondenzen, welcher nach unserer Ausdrucksweise durch eine Imaginärprojection $(C\, s\, i)$ vermittelt wird, erwähnt Wiener in seinem Lehrbuche der darstellenden Geometrie (1884, p. 315 ff.). Dort wird der Kegelschnitt *l* abgeleitet, dessen Punkte den imaginären Punkten eines Kegelschnittes *m* entsprechen, die auf Geraden durch das Centrum einer Collineation liegen. Axe derselben ist die Polare des Centrums in Bezug auf *m*. Die Charakteristik ist $\pm i$. Wiener nennt den Kegelschnitt *l* die Imaginärprojection von *m*.

— $\varrho_e \varrho_f \varrho_g$ — *durch* C *liegen.* Die *Seiten* dieses Dreiecks — $e_i f_i g_i$ — *sind imaginäre Gerade erster Art, deren reelle Punkte* — $S_e S_f S_g$ — *in* den Schnittpunkten von $e f g$ mit s *gelegen sind.*

Wir wollen dieses Dreieck als ein imaginäres Dreieck erster Art bezeichnen. C *nennen wir das Centrum, s die Axe desselben.*

Geben wir drei imaginäre Punkte — $E_i F_i G_i$ — deren reelle Träger sich in einem Punkte C schneiden, so können wir beweisen, dass die reellen Punkte der Verbindungslinien von $E_i F_i G_i$ auf einer Geraden liegen. Construiren wir nämlich die Verbindungslinien $e_i f_i$ der Ecken $F_i G_i$ und $E_i G_i$, so erhalten wir 2 Strahleninvolutionen, welche perspectivisch zu einer Punkteinvolution sind, durch welche G_i dargestellt wird. Also sind die Strahleninvolutionen zueinander perspectivisch. Sie werden von ϱ_f resp. ϱ_e in Punkteinvolutionen geschnitten, welche gleichfallss zueinander perspectivisch sind und die Punkte F_i resp. E_i definiren. Correspondirende Paare der letzterwähnten Involutionen werden mithin durch Strahlen verbunden, welche sich in einem Punkte — S_g — schneiden. Diese bestimmen die Involution, durch welche die Gerade $\overline{E_i F_i}$ — oder g_i — definirt wird.

Ueberblicken wir die jetzt skizzirte Figur (Fig. 2)*), so haben wir in derselben perspectivische Dreiecke — $X X'$, $Y Y'$ ... gezeichnet — deren Ecken — $X_e X'_e \ldots$, $X_f X'_f \ldots$, $X_g X'_g \ldots$ auf den Geraden $\varrho_e \varrho_f \varrho_g$ liegen. Die Strahlen der Involutionen, durch welche $e_i f_i g_i$ definirt werden, sind entsprechende Seiten dieser perspectivischen Dreiecke.

---

*) Von den Involutionen ist je ein Paar entsprechender Elemente gezeichnet.

Mithin müssen die Schnittpunkte dieser Seiten, d. h. die Punkte $S_e S_f S_g$ auf einer Geraden liegen.

Auf analoge Art können wir zeigen, dass drei imaginäre Gerade erster Art, welche eine Gerade s reell schneiden, sich in drei imaginären Punkten treffen, deren reelle Träger durch einen Punkt gehen. Also gehören diese Geraden einem imaginären Dreieck erster Art an und wir sagen:

Drei imaginäre Punkte, welche auf Geraden durch einen reellen Punkt liegen, oder drei imaginäre Gerade erster Art, welche eine reelle Gerade reell schneiden, bestimmen ein imaginäres Dreieck erster Art.

Construiren wir nun zu einem derart bestimmten imaginären Dreieck erster Art ein reelles — $E^* F^* G^*$ — dessen Ecken resp. auf $\varrho_e \varrho_f \varrho_g$ liegen und dessen Seiten resp. durch $S_e S_f S_g$ gehen, so können wir beweisen, dass das imaginäre Dreieck dem reellen in einer Collineation ($C s \varDelta_c^*$) entspricht.

Sei nämlich C_2 ein beliebiger Punkt auf der Geraden c, welche in C zur Ebene der Collineation senkrecht steht, so projiciren wir die Punkte $E_i F_i G_i$ aus C_2 auf S.*) Wir erhalten hierdurch in letzterer Ebene drei imaginäre Punkte — $S_{ei} S_{fi} S_{gi}$ — deren reelle Träger zur Ebene der Collineation senkrecht stehen und deren Verbindungslinien resp. durch $S_g S_e S_f$ gehen. Ziehen wir dann die resp. Geraden $E S_{ei}$, $F S_{fi}$, $G S_{gi}$, so müssen diese sich in einem Punkte — C_{2i} — von c schneiden. Denn die Involutionen, durch welche letztere Gerade definirt werden, bilden Dreiecke — $X X'$, $Y Y'$..., welche zum Dreieck E F G perspectivisch sind. Also werden die Verbin-

*) Mit S sei wie oben die Normalebene durch s zur Ebene der Collineation bezeichnet.

dungslinien entsprechender Punkte je eines dieser Dreiecke und des Dreiecks $E^* F^* G^*$ sich in einem Punkte schneiden; z. B. die Geraden, welche $E^* F^* G^*$ mit den resp. Ecken $X_e X_f X_g$ des Dreiecks X verbinden, treffen sich in einem Punkte X. Diese Geraden schneiden aber c, weil sie sich in Ebenen befinden, welche resp. durch $\varrho_e \varrho_f \varrho_g$ gehen und zur Ebene der Collineation senkrecht stehen. Sollen also $X_e E$, $X_f F$, $X_g G$ durch einen Punkt gehen, so muss dieser auf c liegen. In analoger Weise erhalten wir in c die Punkte X′, Y Y′... — entsprechend den Dreiecken X', $Y Y'$, ... Mithin wird hierdurch in c eine Punktinvolution bestimmt und diese definirt einen imaginären Punkt C_{1i}. Bemerken wir noch, dass durch die Punkte $C\, C_{1i}\, C_2$ ein Verhältniss: $\varDelta_c^* = \frac{C C_{1i}}{C C_2}$ festgesetzt wird, so lehrt uns die construirte Raumfigur, dass das Dreieck $E_i F_i G_i$ dem reellen Dreieck $E^* F^* G^*$ in einer Collineation $(C\, s\, \varDelta_c^*)$ correspondirt.

Seien $L_i M_i$ zwei Punkte von $e_i f_i$, deren reelle Träger — $l\, m$ — sich in ϱ_g schneiden, so sind die Involutionen, durch welche diese Punkte definirt werden, resp. perspectivisch zu den Involutionen, welche $e_i f_i$ darstellen. Letztere Involutionen sind aber perspectivisch zur Punkteinvolution, welche G_i definirt. Also sind auch die Involutionen, welche $L_i M_i$ bestimmen, einander perspectivisch zugeordnet. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte schneiden sich folglich in einem Punkte S und definiren die Gerade i, welche durch $L_i M_i$ geht. Zugleich correspondiren sich diese Geraden in perspectivischen Dreiecken, deren andere Seiten die Involutionen bestimmen, durch welche die Geraden $e_i f_i$ dargestellt werden. Daraus folgt, dass S mit den Punkten $S_e S_f$ auf einer Geraden sich befindet, d. h. S liegt in s. Wir sagen daher:

Die Verbindungslinie irgend zweier Punkte des imaginären Dreiecks erster Art, deren reelle Träger sich auf einer der Geraden $\varrho_e\ \varrho_f\ \varrho_g$ *schneiden, hat ihren reellen Punkt in der Axe des Dreiecks.*

Ziehen wir jetzt eine Gerade n so, dass das Dreieck $l m n$ seine Ecken resp. auf $\varrho_e \varrho_f \varrho_g$ hat (Fig. 2.), so ist dieses zu allen Dreiecken $X X'$, $Y Y'$... perspectivisch, durch deren Seiten die Involutionen für $e_i\, f_i\, g_i$ bestimmt werden. Also liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten von $l m n$ und X auf einer Geraden x, von $l m n$ und X' auf einer Geraden x' u. s. f. Diese Geraden stellen aber — wie wir oben gesehen haben — die Verbindungslinie — i — der Punkte $L_i\, M_i$ dar. Mithin muss auch der Punkt, in welchem n die Gerade g_i schneidet, auf i liegen.

Bezeichnen wir die Seiten $l\, e_i$, $m\, f_i$, $n\, g_i$ als correspondirende Seiten der Dreiecke $l m n$, $e_i\, f_i\, g_i$, so können wir das Gesagte dahin ausdrücken:

Construiren wir zu einem imaginären Dreieck erster Art ein reelles, dessen Ecken auf den nämlichen Geraden durch C liegen, wie die Ecken des imaginären Dreiecks, so schneiden sich die correspondirenden Seiten beider Dreiecke in Punkten einer imaginären Geraden, deren reeller Punkt sich auf der Axe des imaginären Dreiecks befindet.

Gehen wir von einer Geraden i aus, welche s reell schneidet, so ergibt ein ähnlicher Gedankengang Folgendes:

Schneiden wir die Seiten eines imaginären Dreiecks erster Art mit einer imaginären Geraden, deren reeller Punkt in der Axe des imaginären Dreiecks liegt, so bilden die reellen Träger der Schnittpunkte ein Dreieck, dessen Ecken auf den Geraden gelegen sind, welche die Ecken des imaginären Dreiecks enthalten.

Gehen $l m n$ durch C, so folgt:

Schneiden wir die Seiten eines imaginären Dreiecks erster Art resp. mit 3 Geraden durch das Centrum, so sind die Schnittpunkte Ecken eines neuen imaginären Dreiecks, welches dieselbe Axe hat wie das alte.

Wir wenden uns zu einer Collineation ($C_i\, s\, \Delta_c$). Nach dem unter 2 Gesagten correspondirt in derselben einer reellen Geraden eine imaginäre, welche die reelle in s schneidet. Entsprechende Punkte liegen auf Geraden durch C_i.

Darnach wird einem reellen Dreieck — E F G — ein imaginäres entsprechen, dessen Seiten — $e_i f_i g_i$ — sich mit $e f g$ in s schneiden. Mithin ist dieses Dreieck ein imaginäres Dreieck erster Art. Seine Ecken liegen auf reellen Geraden — $\varrho_e\, \varrho_f\, \varrho_g$ — durch einen Punkt C. Ueberdies sind diese Ecken — als correspondirende Punkte zu E F G — auf Geraden durch C_i gelegen.

Zeichnen wir ein reelles Dreieck — $E^* F^* G^*$ — (Fig. 3), dessen Seiten durch die reellen Punkte — $S_e S_f S_g$ — des zuletzt gefundenen imaginären Dreiecks gehen, so liegt $E^* F^* G^*$ zu allen Dreiecken — XX', YY' ... — perspectivisch, durch welche die Seiten des imaginären Dreiecks definirt werden. Folglich schneiden sich die Geraden, welche $E^* F^* G^*$ und die resp. Ecken von X verbinden, in einem Punkte X u. s. f. Wir erhalten auf diese Weise eine Reihe von Punkten — X X', Y Y' ... —. Diese liegen in einer Geraden, welche durch C geht. Seien nämlich $X_e X_e'$, $Y_e Y_e'$ ... und $X_f X_f'$, $Y_f Y_f'$ ... die Ecken der Dreiecke XX', YY' ..., welche auf ϱ_e, ϱ_f liegen, so bilden diese Punkte zueinander perspectivische Reihen. Projiciren wir die erste dieser Reihen aus E, die zweite aus F, so erhalten wir zwei zu einander perspectivische Büschel. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen somit auf

einer Geraden. Diese geht durch C, weil C den Reihen $X_e X_e' \dots$ und $X_f X_f'$ als sich entsprechender Punkt angehört. Bemerken wir noch, dass diese Schnittpunkte nichts anderes sind, als die oben erwähnten Punkte XX', $YY' \dots$, so ist die aufgestellte Behauptung, dass sie in einer Geraden durch C liegen, erwiesen. Sie sind in derselben Weise einander zugeordnet wie die Dreiecke $XX' \dots$, bestimmen also eine Involution und definiren einen imaginären Punkt C_i.

Indem wir die Punkte $E^* E_i$, $F^* F_i$, $G^* G_i$ als correspondirende bezeichnen, können wir das Bewiesene dahin aussprechen:

Construiren wir ein reelles Dreieck, dessen Seiten durch die reellen Punkte eines imaginären Dreiecks erster Art gehen, so liegen die correspondirenden Ecken beider Dreiecke auf Geraden durch einen imaginären Punkt. Sein reeller Träger geht durch das Centrum des imaginären Dreiecks.

Wir heben schliesslich *einige specielle Fälle des imaginären Dreiecks erster Art* hervor.

Gehen wir von einer Collineation $(Cs\varDelta_i)$ aus, so entspricht in derselben einem reellen Dreieck ein imaginäres Dreieck erster Art. Dasselbe ist dadurch ausgezeichnet, dass in den Involutionen, durch welche die Ecken $E_i F_i G_i$ definirt werden, dem Punkte C die resp. Schnittpunkte der Träger mit s entsprechen. Wir wollen dies kurz so ausdrücken: *Das Centrum des Dreiecks entspricht der Axe.*

Geben wir eine Collineation $(Ci\varDelta)$, so correspondirt in derselben ebenfalls einem reellen Dreieck ein imaginäres Dreieck erster Art. Die reellen Punkte seiner Seiten liegen auf der Geraden, welche C mit dem reellen Punkte von i verbindet. Das auf diesem Wege erhaltene imagi-

näre Dreieck ist also dadurch ausgezeichnet, *dass sein Centrum in seiner Axe liegt.*

Ein imaginäres Dreieck erster Art von derselben speciellen Form wie die zuletzt erwähnte erhalten wir als die entsprechende Figur zu einem reellen Dreieck in der Collineation $C_i\, i\, \Delta$. Die Ecken dieses imaginären Dreiecks liegen auf Geraden, welche durch den Schnittpunkt — C — von s mit dem reellen Träger des Punktes C_i gehen.

Den jetzt betrachteten imaginären Dreiecken stehen solche gegenüber, welche durch Imaginärprojection aus zwei reellen und einer imaginären Geraden abgeleitet werden können. Die reellen Punkte der Seiten dieser Dreiecke liegen nicht in einer Geraden. Wir können dieselben als imaginäre Dreiecke zweiter Stufe bezeichnen.

Wenden wir das nämliche Verfahren der Imaginärprojection auf Polygone an, so gelangen wir zu imaginären Polygonen der ersten und zweiten Stufe. Die ersteren sind Bilder von reellen Polygonen und ihre Ecken liegen auf reellen Geraden durch einen Punkt. Ihre Seiten schneiden eine Gerade reell.

Ueber die Schnittpunkte einer imaginären Geraden erster Art mit einem Kegelschnitte und über die Correspondenz imaginärer Elemente im ebenen Polarsystem.

Mit Tafel — Fig. 4.

1.

Eine imaginäre Gerade erster Art — g_i — sei durch eine elliptische Strahleninvolution — J — und einen be-

stimmten Sinn gegeben. S sei der reelle Punkt dieser Geraden. $x x_1$, $y y_1$ seien correspondirende Strahlenpaare der Involution J. In ihrer Ebene liege ein Kegelschnitt K^2.

Wir fragen nach den Punkten, in denen g_i den Kegelschnitt K^2 schneidet.

Zur Beantwortung dieser Frage construiren wir zu den Punkten A B ... der Geraden x die Polaren in Bezug auf K^2. Sie bilden ein Büschel, das zur Reihe der Punkte in x projectivisch ist. Mithin schneidet dasselbe aus x_1 eine Reihe von Punkten — A_1 B_1 ... — welche projectivisch zur Reihe A B ist. Die Verbindungslinie entsprechender Punkte dieser Reihen umhüllen also einen Kegelschnitt — K^2_x. Derselbe ist dadurch charakterisirt, dass jede seiner reellen Tangenten aus $x x_1$ zwei Punkte schneidet, welche in Bezug auf K^2 ein Paar der Involution harmonischer Pole bilden.

Zu den nämlichen projectivischen Reihen auf x und x_1 und mithin zu dem nämlichen Kegelschnitt K^2_x gelangen wir, indem wir zu den Punkten von x_1 die Polaren in Bezug auf K^2 zeichnen und diese mit x schneiden.

Construiren wir jetzt zu den Punkten von y — resp. y_1 — die Polaren in Bezug auf K^2 und schneiden wir diese mit y_1 — resp. y — so erhalten wir projectivische Reihen in y und y_1. Die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punkte umhüllen einen Kegelschnitt K^2_y. Seine reellen Tangenten schneiden aus $y y_1$ Paare der Involution harmonischer Pole in Bezug auf K^2.

Ist t_1 eine gemeinsame reelle Tangente von K^2_x und K^2_y, so trifft sie sowohl $x x_1$ als $y y_1$ in Paaren der Involution harmonischer Pole in Bezug auf K^2. Da eine Involution durch 2 Paare bestimmt ist, so folgt, dass t_1 die imaginäre Gerade g_i in einem imaginären Punkte

— P_{1i} — von K^2 schneidet. In analoger Weise wie zu $x x_1$, $y y_1$ können wir zu jedem weiteren Paare der Involution J einen Kegelschnitt construiren. Eine reelle gemeinsame Tangente von irgend zwei solchen Kegelschnitten trifft die zu diesen gehörenden Paare der Involution J in Punktepaaren der Involution harmonischer Pole in Bezug auf K^2. Also schneidet diese Tangente auch alle übrigen Paare der Involution J in Paaren der Involution harmonischer Pole d. h. sie berührt alle übrigen Kegelschnitte $K^2_x K^2_y$. Daraus folgt, dass diese Kegelschnitte die nämlichen reellen Tangenten besitzen.

Unter den Kegelschnitten $K^2_x K^2_y \ldots$ heben wir einen hervor, welcher degenerirt. Wir gelangen zu demselben, indem wir das gemeinsame Paar — $g g_1$ — zwischen der Involution J und der Involution harmonischer Polaren — J_p — um S in Bezug auf K^2 construiren. Dieses gemeinsame Paar ist stets reell, weil die Involution J elliptisch ist. Zeichnen wir zu ihm den zugehörigen Kegelschnitt — K^2_g — so bemerken wir, dass er in 2 Punkte zerfällt. Es sind dies die Punkte $G G_1$, in denen die Polare — s — von S in Bezug auf K^2 die Geraden $g_1 g$ trifft. Nach dem oben Bewiesenen schneiden die reellen Tangenten, welche wir aus $G_1 G$ an die Kegelschnitte $K^2_x K^2_y \ldots$ ziehen können, die Gerade g_i in imaginären Punkten von K^2.

Um die Lage dieser Tangenten genauer zu bestimmen, wenden wir uns eingehender zur Construction eines der Kegelschnitte $K^2_x K^2_y \ldots$, sagen wir von K^2_x (Fig. 4). Da sehen wir, dass in den Projectivitäten A B ... $A_1 B_1 \ldots$ auf $x x_1$ dem Punkte S die Schnittpunkte — $X X_1$ — von s mit $x x_1$ entsprechen. Folglich berühren die Geraden $x x_1$ in den Punkten $X X_1$ den Kegelschnitt K^2_x und s ist die Polare von S in Bezug auf K^2_x.

Nach Voraussetzung ist die Involution J elliptisch. Folglich trennen sich die Paare xx_1, gg_1, also auch die Punkte XX_1 und GG_1. Daraus ergibt sich, dass von den Punkten GG_1 der eine im Innern des Kegelschnittes K_x^2 liegt, der andere ausserhalb. Daher gehen nur von einem dieser Punkte reelle Tangenten an K_x^2. Weil S und s Pol und Polare von K_x^2 sind, so werden diese Tangenten durch den Strahl aus ihrem Schnittpunkte nach S und durch s harmonisch getrennt.

Wir fassen das Gesagte dahin zusammen:

Eine imaginäre Gerade erster Art trifft einen Kegelschnitt — K^2 — in zwei imaginären Punkten. Der Schnittpunkt ihrer reellen Träger liegt in der Polare — s — des reellen Punktes S *der imaginären Geraden in Bezug auf K^2. Weiter liegt er in einem Strahle des gemeinsamen Paares der Involution, welche die imaginäre Gerade definirt und der Involution harmonischer Polaren um* S *in Bezug auf K^2. Die reellen Träger selbst bilden mit jenem Strahle des gemeinsamen Paares und mit s eine harmonische Gruppe.*

Ein Gedankengang, welcher dem bis jetzt eingeschlagenen dual gegenüber steht, zeigt uns die Construction der Tangenten, welche aus einem imaginären Punkte an einen Kegelschnitt gelegt werden können.

Nehmen wir nun an, der reelle Punkt von g_i liege auf K^2, so sind die Reihen AB... $A_1 B_1$... auf x und x_1 zueinander perspectivisch. Daraus folgt, dass der Kegelschnitt K_x^2 in S und das Perspectivcentrum — S_x — der erwähnten Reihen zerfällt. In analoger Weise degeneriren alle weiteren Kegelschnitte K_y^2... in S und je einen Punkt S_y... Diese Punkte liegen in einer Geraden und repräsentiren eine reelle gemeinsame Tangente aller Kegelschnitte $K_x^2 K_y^2$... Sie schneidet somit g_i in einem Punkte

von K^2. Wir führen diese Construction auf eine bekannte Construction des Schnittpunktes von g_i mit K^2 zurück, indem wir in den zweiten Schnittpunkten von $x x_1 y y_1 \ldots$ mit K^2 die Tangenten zeichnen. Diese treffen sich resp. in den Punkten $S_x S_y \ldots$ einer Geraden, auf welcher der gesuchte Schnittpunkt liegt.

Der duale Gedankengang zeigt uns, wie wir aus einem imaginären Punkte, der auf einer reellen Tangente von K^2 liegt, an letzteren Kegelschnitt die zweite Tangente construiren.

Zum Schlusse bemerken wir, dass die Gerade, welche zu g_i conjugirt ist, den Kegelschnitt K^2 in zwei imaginären Punkten trifft, die zu den Schnittpunkten von g_i mit K^2 conjugirt sind.

2.

Indem wir die Bezeichnung von 1 beibehalten, nehmen wir an, dass durch G die reellen Tangenten — $t_1 t_2$ — an K_x^2 gehen (Fig. 4), auf welchen die imaginären Schnittpunkte — $P_{1i} P_{2i}$ — von g_i mit K^2 liegen. In letzteren wollen wir jetzt die Tangenten an K^2 construiren. Diese sind imaginäre Gerade erster Art — $t_{1i} t_{2i}$ — welche die Pole — $T_1 T_2$ — der reellen Geraden $t_1 t_2$ in Bezug auf K^2 zu reellen Punkten haben. Mithin liegen $T_1 T_2$ auf der Polaren von G in Bezug auf K^2 d. h. auf der Geraden g. Sie werden durch S und G_1 harmonisch getrennt, weil $t_1 t_2$ mit s und g_1 eine harmonische Gruppe bildet. Desgleichen sind die Punkte der Involutionen, welche P_{1i} und P_{2i} definiren, durch S und s harmonisch getrennt. Verbinden wir T_1 mit den Punkten der Involution von P_{1i} und T_2 mit den Punkten der Involution von P_{2i}, so werden die Geraden nach Punkten, welche auf Linien durch S liegen, sich in s schneiden. Unter diesen Ge-

raden bestimmen diejenigen durch T_1 die Involution, welche t_{1i} definirt, und diejenigen durch T_2 die Involution, welche t_{2i} darstellt. Die erwähnten Schnittpunkte in s bestimmen somit eine Involution, welche den Schnittpunkt — G_i — von t_{1i} und t_{2i} definirt.

Ein Paar der letzteren Involution ist $G\,G_1$. Ein zweites Paar erhalten wir, indem wir die Schnittpunkte — $T_x\,T_{x1}$ — von t_1 und $x\,x_1$ mit T_1 verbinden. Diese Verbindungslinien schneiden aus s das gesuchte Paar $S_{x1}\,S_x$. Wir bemerken zu demselben, dass die Polare von T_x in Bezug auf K^2 durch die Punkte T_{x1} und T_1 geht. (Fig. 4.) Folglich ist der Pol von $\overline{T_x S}$ d. h. von x im Schnittpunkte von $T_1\,T_x$ mit s d. h. in S_x gelegen. T_{x1} hat zu Polaren in Bezug auf K^2 die Gerade $\overline{T_x T_1}$. Also liegt der Pol von x_1 im Schnittpunkte von $\overline{T_1 T_x}$ mit s d. h. in S_{x1}.

In analoger Weise können wir zeigen, dass die Pole je eines Paares der Involution J in Bezug auf K^2 ein Paar derjenigen Involution darstellen, welche G_i definirt. Nennen wir G_i den Pol von g_i, so schliessen wir also:

Der Pol einer imaginären Geraden erster Art in Bezug auf einen Kegelschnitt K^2 ist ein imaginärer Punkt. Sein reeller Träger ist die Polare des reellen Punktes der imaginären Geraden. Er wird durch eine Involution definirt, deren entsprechende Paare die Pole entsprechender Paare der Involution sind, welche die imaginäre Gerade bestimmt.

Tritt an Stelle von g_i die conjugirt imaginäre Gerade g^*_i, so sehen wir aus der Construction des Poles von g^*_i, dass dieser zu dem Pole von g_i zugeordnet ist.

Die Schlüsse, welche den jetzt gezogenen dual gegenüberstehen, lehren uns, wie wir zu einem imaginären Punkte — G_i — die Polare construiren. Ihr reeller Punkt ist

der Pol des reellen Trägers von G_i in Bezug auf K^2. Die entsprechenden Paare ihrer Involution sind die Polaren der entsprechenden Punkte derjenigen Involution, durch welche G_i definirt wird.

Aus dieser Beziehung von Pol und Polare ergeben sich noch leicht folgende Consequenzen:

1) Zeichnen wir zu g_i den Pol G_i und sei g_{1i} die Gerade, welche G_i mit dem reellen Punkte S von g_i verbindet, so liegt der Pol G_{1i} von g_{1i} im Schnittpunkte von g_i mit s. Ist P_i irgend ein imaginärer Punkt, der auf g_i sich befindet, so geht die Polare p_i von P_i durch G_i. Es besteht also zwischen den imaginären Geraden durch S in Bezug auf K^2 dieselbe involutorische Zuordnung wie zwischen den reellen Geraden. Wir wollen diese als die *Involution der imaginären harmonischen Polaren um* S in Bezug auf K^2 bezeichnen.

Ist die Involution der reellen harmonischen Polaren um S elliptisch, so definirt sie die imaginären Tangenten durch S an K^2. Diese sind imaginäre Gerade durch S, welche ihre Pole enthalten.

Wir können sie daher als die Doppelstrahlen der Involution imaginärer harmonischer Polaren um S betrachten. Letztere Involution hat keine Doppelstrahlen, wenn die Involution der reellen harmonischen Polaren um S hyperbolisch ist.

Das duale gilt für die Involution harmonischer Pole auf einer reellen Geraden. Die Involution besteht aus einer Involution reeller Punkte und aus einer Involution imaginärer Punkte. Letztere hat Doppelpunkte, wenn erstere keine besitzt.

2) Sei X_i ein imaginärer Punkt auf x. Seine Polare in Bezug auf K^2 ist eine imaginäre Gerade — x_i — deren

reeller Punkt — S_x — der Pol von x in Bezug auf K^2 ist. Zum imaginären Punkte Y_i auf y gehöre als Polare die imaginäre Gerade y_i mit dem reellen Punkte S_y. Construiren wir die Verbindungslinie $X_i Y_i$ — sagen wir z_i — so ist ihr Pol — Z_i — im Schnittpunkte von x_i mit y_i gelegen. Der reelle Träger z von Z_i ist der Pol des reellen Trägers — S_z — von z_i. Wir bemerken nun, dass die Dreiecke xyz und $S_x S_y S_z$ in Bezug auf K^2 zu einander reciprok liegen. Also sind sie zu einander perspectivisch.

3) Die Punkte einer imaginären Geraden haben in Bezug auf K^2 Polaren, welche durch einen imaginären Punkt — den Pol der imaginären Geraden — gehen. Schneiden sich die reellen Träger der imaginären Punkte in einem Punkte, so liegen die reellen Punkte der Polaren auf einer Geraden u. s. f.

Zum Schlusse erwähnen wir, dass die durchgeführten Ueberlegungen allgemeiner erscheinen, wenn wir an Stelle von K^2 die reciproken in einander liegenden Ebenen setzen, deren Abhängigkeit durch K^2 geleitet wird. Dann ist durch Vorstehendes die Correspondenz imaginärer Elemente in solchen Ebenen erledigt.

Der Kegel zweiten Grades mit imaginärer Spitze.

1.

L_1^2 sei ein reeller Kegelschnitt in der Ebene L_1. C_i sei ein imaginärer Punkt auf der reellen Geraden c. Derselbe werde durch eine elliptische Involution — J_c — und einen bestimmten Sinn gegeben. Die Geraden, welche

durch C_i und die Punkte von L_1^2 gehen, fassen wir als Erzeugende eines Kegels — K_i^2 — auf.

Legen wir durch c ein Ebenenbüschel, so schneidet dieses die Ebene L_1 in einem Strahlenbüschel, dessen Scheitel — C_1 — im Schnitte von c mit L_1 gelegen ist.

Wir nehmen nun *zuerst* an, dass von C_1 aus reelle Tangenten an den Kegelschnitt L_1^2 gehen.

Dann gibt es Gerade — ϱ_1 — durch C_1, welche L_1^2 in imaginären Punkten treffen. Ihre Verbindungslinien mit C_i liegen in den durch c gehenden Ebenen, sind also imaginäre Gerade erster Art. Wir können beweisen, dass ihre reellen Punkte auf einem Kegelschnitt — L_2^2 — liegen.

Zu diesem Zwecke bestimmen wir in der Involution J_c zu C_1 den correspondirenden Punkt C_2 und ein Punktepaar — $X_1 X_2$ — welches mit $C_1 C_2$ eine harmonische Gruppe bildet. Dann zeichnen wir auf den Geraden ϱ_1 die Punkte C_p, welche C_1 in den Involutionen harmonischer Pole in Bezug auf L_1^2 entsprechen. Diese Punkte liegen in der Polaren p von C_1. Weiter bestimmen wir in den erwähnten Involutionen die Punktepaare $P_1 P_2$, welche mit C_1 und C_p harmonische Gruppen bilden. Bekanntlich ist der Ort dieser Punkte ein Kegelschnitt — L_{1c}^2 — welcher zu dem Kegelschnitt L_1^2 in Bezug auf C_1 conjugirt ist.*)

Wenden wir uns jetzt zu den in einer Geraden ϱ_1 liegenden Punktepaaren $C_1 C_p$, $X_1 X_2$, so bestimmen diese eine Involution, welche zwei conjugirt imaginäre Punkte — $R_{1i} R_{1i}^*$ — von L_1^2 definirt. Von diesen Punkten sei R_{1i} dadurch festgesetzt, dass die drei Geraden $C_2 C_p$, $X_1 P_1$ und $X_2 P_2$ sich in dem reellen Punkte — R_2 — der Ge-

*) Vergl. Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig 1884. I. Bd., p. 315.

raden $C_i R_{1i}$ schneiden. Dann müssen sich $C_2 C_p$, $X_1 P_2$ und $X_2 P_1$ in dem reellen Punkte — R_2^* — von $C_i R_{1i}^*$ treffen. Indem wir auf diese Weise zu allen Geraden durch C_i und die reellen Punkte von L_1^2 die reellen Punkte R_2 bestimmen, bemerken wir, dass letztere auf Geraden durch C_2 in der Ebene C_{2p} — sagen wir L_2 — liegen. Ferner befinden sich diese Punkte R_2 auf Kegeln, welche wir aus X_1 und X_2 über der Leitcurve L_c^2 errichten können. Daraus folgt, dass sich diese Kegel — ausser in L_1^2 — noch in einem Kegelschnitt L_2^2 durchdringen. Er ist der Ort der Punkte R_2 und liegt in L_2. Er trifft L_1^2 in den Schnittpunkten dieses Kegelschnittes mit p und der Pol dieser Linie ist C_2. Daraus folgt, dass C_2 ausserhalb L_2^2 liegt, wenn C_1 sich ausserhalb L_1^2 befindet. Es gehen daher in diesem Falle durch C_2 in der Ebene L_2 reelle Gerade — ϱ_2 — welche den Kegelschnitt L_2^2 in imaginären Punkten — R_{2i} R_{2i}^* — schneiden. Verbinden wir diese Punkte mit C_i, so erhalten wir imaginäre Gerade erster Art. Wir zeigen, dass ihre reellen Punkte in L_1^2 liegen, d. h. dass diese Gerade Erzeugende des Kegels K_i^2 sind.

Um diesen Beweis zu führen, construiren wir — wie oben — in c die Gruppe $(C_1\ C_2\ X_1\ X_2) = -1$. Dann zeichnen wir auf den Geraden ϱ_2 in den Involutionen harmonischer Pole in Bezug auf L_2^2 die Punkte C_p, welche C_2 correspondiren und die Punkte $P_1 P_2$, welche mit C_1 und dem resp. C_p eine harmonische Gruppe bilden. Nun liegen die Punkte C_p auf p, die Punkte $P_1 P_2$ auf dem zu L_2^2 in Bezug auf C_2 conjugirten Kegelschnitt L_{2c}^2. Also sind die reellen Punkte der Geraden $C_i R_{2i}$ in der Ebene L_1 und in den Kegeln gelegen, welche L_{2c}^2 aus X_1 und X_2 projiciren. Folglich durchdringen sich letztere Kegel — ausser in L_{2c}^2 — noch in einem Kegelschnitt, der in L_1

liegt. Dieser ist die Projection von L_{2c}^2 aus einem der Punkte $X_1 X_2$ auf L_1. Oben haben wir gesehen, dass L_{2c}^2 die Projection von L_{1c}^2 aus einem der Punkte $X_1 X_2$ auf L_2 war. Mithin muss der gesuchte Kegelschnitt in in L_1 zu L_{1c}^2 in Bezug auf C_1 conjugirt sein, d. h. mit L_1^2 zusammenfallen.

Das jetzt Bewiesene können wir auch so ausdrücken: In jeder Ebene durch c, welche L_2^2 in zwei imaginären Punkten schneidet, liegen zwei reelle Punkte von L_1^2. Weil aber L_2^2 die Projection des zu L_1^2 conjugirten Kegelschnittes L_{1c}^2 aus einem Punkte von c ist, so folgt, dass alle Ebenen, welche L_1^2 reell schneiden, den Kegelschnitt L_2^2 imaginär treffen. Indem wir von letzteren ausgehen, erhalten wir daher auf die angegebene Weise sämmtliche reelle Punkte von L_1^2. Wir können also die bewiesene Abhängigkeit der Punkte R_{2i} R_1 umkehren und sagen: Die Erzeugenden des Kegels K_i^2, deren reelle Punkte in L_1^2 liegen, schneiden L_2 in imaginären Punkten von L_2^2, welche paarweise auf Geraden durch C_2 sich befinden.

Auf den Geraden ϱ_1 wird durch die Involutionen harmonischer Pole in Bezug auf L_1^2 ein Polarsystem bestimmt, welches L_1^2 zur Leitcurve hat. Auf den Geraden ϱ_2 bestimmen die Involutionen harmonischer Pole in Bezug auf L_2^2 ein Polarsystem, dessen Leitcurve dieser Kegelschnitt ist. Wir haben gezeigt, dass in dem Falle, in welchem C_1 in Bezug auf L_1^2 ein hyperbolischer Punkt ist, diese Involutionen die resp. Projectionen der Curven $L_1^2 L_2^2$ aus C_i auf $L_2 L_1$ sind. Also müssen auch die erwähnten Polarsysteme gegenseitige Projectionen aus C_i sein.

Wir wenden uns *zweitens* zu der Annahme, dass C_1 im Inneren des reellen Kegelschnittes L_1^2 liege.

Dann schneidet jede Gerade durch C_1 diesen Kegel-

schnitt in zwei reellen Punkten. Durch sie und C_i legen wir die Erzeugenden des Kegels K_i^2 und schneiden diese mit einer Ebene L_2, welche durch C_2 und die Polare p von C_1 in Bezug auf L_1^2 geht.

Ist also $R_1 R_1^*$ ein Punktepaar von L_1^2, welches auf einer Geraden ϱ_1 durch C_1 liegt, so wird dieses durch C_1 und den Schnittpunkt — C_p — von ϱ_1 mit p harmonisch getrennt. Indem wir nun die Geraden $R_1 C_i$ und $R_1^* C_i$ construiren, haben wir die Punkte $R_1 R_1^*$ mit den Punkten $C_1 C_2 X_1 X_2$ zu verbinden. Weil letztere und die Punkte $C_1 C_p R_1 R_1^*$ harmonische Gruppen bilden, so müssen sich $R_1 X_1$, $R_1^* X_2$ in einem Punkte Y_1 von $C_2 C_p$ — sagen wir von ϱ_2 — schneiden. Und $R_1 X_2$, $R_1^* X_1$ treffen sich in einem Punkte Y_2 von ϱ_2. $Y_1 Y_2$ bilden mit C_2 und C_p eine harmonische Gruppe und diese Punkte sind resp. Paare der Involutionen, welche die Schnittpunkte — $R_{2i} R_{2i}^*$ — von $C_i R_1$ und $C_i R_1^*$ mit L_2 definiren. Folglich sind diese Schnittpunkte zu einander conjugirt imaginär.

Indem wir die dargestellte Construction in allen Ebenen, welche durch c gehen, durchführen, erhalten wir auf jeder reellen Geraden ϱ_2 durch C_2 in L_2 zwei conjugirt imaginäre Punkte.

Die Paare $Y_1 Y_2$ der Involutionen, welche diese Punkte darstellen, liegen in den projicirenden Kegeln aus X_1 und X_2 über L_1^2. Folglich durchdringen sich diese Kegel — ausser in L_1^2 — in einem in L_2 gelegenen Kegelschnitt L_{2c}^2. Seine Punkte werden durch C_2 und p harmonisch getrennt. Also sind sie mit C_2 und C_p Paare von Involutionen, welche imaginäre Doppelpunkte eines Polarsystems definiren. Dieses hat zur Leitcurve einen Kegelschnitt — L_2^2 — welcher zu L_{2c}^2 in Bezug auf C_2 conjugirt ist und welcher imaginär sein muss.

Wir sehen aus dem Bewiesenen, dass auch in dem Falle, in welchem C_i in Bezug auf L_1^2 elliptisch ist, die Projectionen der reellen Punkte von L_1^2 aus C_i auf L_2 imaginäre Punkte sind, welche ein Polarsystem bestimmen und wir schliessen — wie oben — dass dieses Polarsystem die Projection des durch L_1^2 geleiteten aus C_i ist.

In analoger Weise lässt sich darthun, dass ein Polarsystem, welches den imaginären Kegelschnitt L_2^2 zur Leitcurve hat, aus C_i auf L_1 als ein Polarsystem projicirt wird, dessen Leitcurve L_1^2 ist. Anstatt nun — wie dies oben geschehen ist — aus L_1^2 den imaginären Kegelschnitt L_2^2 abzuleiten, können wir von einem imaginären Kegelschnitt L_2^2 ausgehen. Dann ergibt uns der zuletzt angedeutete Beweis, dass die Projection dieses Kegelschnittes aus C_i ein reeller Kegelschnitt L_1^2 ist. Wir sehen also, dass in allen besprochenen Fällen die Kegelschnitte L_1^2 L_2^2 — wir wollen sie Leitcurven von K_i^2 nennen — in Bezug auf K_i^2 die nämliche Bedeutung haben, welche wir dahin präcisiren können:

Hat ein Kegel eine imaginäre Spitze und eine reelle Curve zweiter Ordnung zur Leitcurve, so besitzt derselbe eine zweite reelle Leitcurve zweiter Ordnung, wenn der reelle Träger der Spitze die Ebene der ersten Leitcurve in einem Punkte schneidet, welcher in Bezug auf diese hyperbolisch ist. Wird dieser Punkt elliptisch, so hat der Kegel eine zweite imaginäre Leitcurve zweiter Ordnung. Jede Erzeugende des Kegels schneidet die Ebenen beider Leitcurven in Doppelpunkten der Polarsysteme, welche durch diese Leitcurven bestimmt werden.

Der Kürze halber wollen wir den Kegel mit imaginärer Spitze, dessen beide Leitcurven reell sind, einen *hyperbolisch imaginären Kegel* nennen. Der Kegel K_i^2,

für welchen eine Leitcurve reell und eine imaginär ist, sei als *elliptisch imaginärer* Kegel bezeichnet. Als Grenzfall dieser beiden Kegel können wir den *parabolisch imaginären Kegel* betrachten. Bei ihm schneidet der reelle Träger — c — der Spitze eine Leitcurve. Im Schnittpunkte wird diese von der Ebene der anderen Leitcurve berührt, welche in die doppelt zu zählende Gerade c zerfällt.

2.

Gegeben sei eine reelle Gerade g, welche zu c windschief ist. Wir suchen ihre Schnittpunkte mit dem Kegel K_i^2. Zu diesem Zwecke legen wir durch g und die Spitze C_i von K_i^2 eine Ebene. Sie schneidet die Ebene einer Leitcurve — sagen wir L_1 — in einer imaginären Geraden erster Art — g_{1i}. Eine solche trifft den Kegelschnitt L_1^2 im Allgemeinen in zwei nicht zu einander conjugirten imaginären Punkten.*) Indem wir jeden derselben mit C_i verbinden, erhalten wir zwei imaginäre Gerade erster Art, welche Erzeugende des Kegels K_i^2 sind und g in den gesuchten Punkten schneiden. Aus ihrer Construction folgt, dass sie nicht zu einander conjugirt imaginär sind.

Schneidet g die Gerade c, so trifft die Ebene gc eine der Leitcurven von K_i^2 in zwei reellen Punkten. Ihre Projectionen aus C_i auf g sind zwei nicht conjugirte imaginäre Punkte von K_i^2. Wir können also das Bewiesene dahin zusammenfassen:

Eine reelle Gerade schneidet im Allgemeinen K_i^2 in zwei nicht conjugirten imaginären Punkten.

---

*) Vgl. Ueber die Schnittpunkte einer imaginären Geraden erster Art mit einem Kegelschnitt. Nr. 1.

Eine *erste Ausnahme* von dieser Regel machen — wie wir unter 1 gezeigt — die Geraden in L_1 und L_2. Sie schneiden K_i^2 entweder in reellen oder conjugirt imaginären Punkten oder sie berühren K_i^2 reell.

Eine *zweite Ausnahme* bilden die Geraden, welche eine der beiden Leitcurven — sagen wir L_1^2 in S_1 — reell schneiden. Sind diese Geraden zu g windschief, so ist S_1 der reelle Punkt von g_{1i}. Letztere Gerade trifft L_1^2 in einem zweiten — imaginären — Punkte. Projiciren wir diesen aus C_i auf g, so erhalten wir den zweiten — imaginären — Schnittpunkt von g mit K_i^2. Schneiden wir dann die Ebene L_2 mit der Ebene, welche durch g und C_i geht, so ist die Schnittlinie eine imaginäre Gerade g_{2i}, deren einer Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt L_2^2 auf der Geraden $S_1 C_i$ liegen muss. Daraus folgt, dass dieser Schnittpunkt ein imaginärer Punkt auf einer Geraden durch C_2 ist. Indem wir das Analoge für eine zu c windschiefe Gerade nachweisen, welche L_2^2 reell schneidet, sagen wir:

Jede imaginäre Ebene durch C_i, *deren reeller Träger die eine der zwei Leitcurven von* K_i^2 *reell schneidet, trifft die andere in einem imaginären Punkte, dessen reeller Träger die Gerade* c *schneidet.*

Trifft g eine Leitcurve und c reell, so schneidet die Ebene durch c und g die andere Leitcurve imaginär.

Als *dritte Ausnahme* heben wir die reellen Geraden hervor, welche L_1^2 und L_2^2 — sagen wir in S_1 und S_2 — reell schneiden. Die Ebene durch eine solche Gerade und C_i trifft L_1 und L_2 in imaginären Geraden, deren reelle Punkte $S_1 S_2$ sind. Die resp. zweiten Schnittpunkte dieser Geraden mit L_1^2 und L_2^2 liegen auf Geraden durch C_1 resp. C_2, weil diese Schnittpunkte die Projectionen von S_2 resp. S_1 aus C_i sind. Wir schliessen also:

Jede imaginäre Ebene durch C_i, *deren reeller Träger die Verbindungslinie eines reellen Punktes einer Leitcurve mit einem reellen Punkte der anderen Leitcurve ist, schneidet diese Leitcurven in imaginären Punkten, deren reelle Träger* c *treffen.*

Unter den jetzt hervorgehobenen Geraden sind diejenigen ausgezeichnet, welche durch die eventuell reellen zwei Schnittpunkte von L_1^2 und L_2^2 gehen. Sind diese Geraden zu c windschief, so treffen sie K_i^2 — ausser in einem jener Schnittpunkte — noch in einem imaginären Punkte. Sind sie aber nicht zu c windschief, so berühren sie K_i^2 reell.

Zu einer *vierten Ausnahme* werden wir geführt, wenn wir die *Tangentialebenen von* K_i^2 betrachten.

Sei P_{1i} ein imaginärer Punkt von L_1^2, so geht durch ihn eine imaginäre Tangente t_{1i} an diesen Kegelschnitt. Die Ebene durch sie und C_i bezeichnen wir als Tangentialebene der Erzeugenden $P_{1i}C_i$ von K_i^2. Der reelle Träger — t — dieser Tangentialebene wird von $P_{1i}C_i$ in einem imaginären Punkte geschnitten. Wir sagen t berühre in diesem Punkte den Kegel K_i^2 und nennen t eine Tangente von K_i^2. Unter Benützung dieser Bezeichnungsweise schliessen wir also:

Die reellen Träger der Tangentialebenen an K_i^2 *sind im Allgemeinen reelle Tangenten von* K_i^2 *mit imaginären Berührungspunkten.*

Zur Construction dieser reellen Träger sei Folgendes bemerkt: Der reelle Punkt der Tangente t_{1i} ist der Pol P_1 des reellen Trägers von P_{1i} in Bezug auf L_1^2. Schneide C_iP_{1i} die Ebene L_2 in P_{2i}, und sei t_{2i} die Tangente in diesem Punkte an L_2^2, so liegt ihr reeller Punkt im Pole P_2 des reellen Trägers von P_{2i}. Mithin ist die Verbin-

dungslinie der Punkte $P_1 P_2$ zugleich die reelle Gerade t der Tangentialebene längs $P_{1i} P_{2i}$.

Wir sehen, dass auf diese Weise jeder Erzeugenden des Kegels K_i^2 eine reelle Gerade correspondirt, welche Träger der Tangentialebene längs jener Erzeugenden ist. Ist die Erzeugende eine imaginäre Gerade erster Art, so liegt — wie wir unter 1 gezeigt — ihr reeller Punkt auf einer der Leitcurven. Construiren wir in ihm an diese die Tangente, so ist sie reeller Träger der Tangentialebene jener Erzeugenden. In der angedeuteten Correspondenz sind also die Erzeugenden von K_i^2, welche imaginäre Gerade erster Art sind, dadurch ausgezeichnet, dass ihnen die reellen Tangenten der Leitcurven entsprechen. Weiter erwähnen wir die Erzeugenden von K_i^2, welche durch die Schnittpunkte von L_1^2 und L_2^2 gehen. Sind letztere imaginär, so werden jene Erzeugenden imaginäre Gerade zweiter Art sein. Die Tangentialebenen, welche längs dieser Erzeugenden K_i^2 berühren, gehen durch c und diese Gerade correspondirt beiden Erzeugenden.

Schneiden sich L_1^2 und L_2^2 in reellen Punkten, so gehen durch diese und C_i imaginäre Gerade erster Art, deren Ebenen längs jener Geraden K_i^2 berühren. Jede Gerade einer solchen Ebene kann somit als reelle Tangente von K_i^2 betrachtet werden.

Damit haben wir alle reellen Tangenten von K_i^2 hervorgehoben. Gemeinsam ist ihnen, dass sie K_i^2 reell oder imaginär berühren und in diesem Sinne bilden sie eine Ausnahme von der oben gegebenen Regel.

3.

Wir wenden uns nun einer Aufgabe zu, welche der jetzt erörterten dual gegenübersteht.

Gegeben sei ein reeller Punkt P. Wir suchen die Tangentialebenen, welche durch ihn an K_i^2 gehen. Zu diesem Zwecke ziehen wir C_i P. Diese Gerade schneidet die Ebenen der Leitcurven in zwei imaginären Punkten. Durch jeden derselben gehen zwei imaginäre Tangenten an die Leitcurve. Die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen auf Geraden durch C_i d. h. auf Erzeugenden von K_i^2. Längs dieser wird K_i^2 von Tangentialebenen berührt, welche durch P gehen. Ihre reellen Träger schneiden sich in P und wir sagen daher:

Durch jeden reellen Punkt des Raumes gehen im Allgemeinen zwei Tangentialebenen und zwei reelle Tangenten an K_i^2.

Zur Construction dieser reellen Tangenten bemerken wir Folgendes: Die reellen Punkte der Tangenten, welche wir aus einem imaginären Punkte an einen Kegelschnitt ziehen können, befinden sich in einer Geraden, welche durch den Pol des reellen Trägers von jenem imaginären Punkte geht.

In unserem Falle ist dieser imaginäre Punkt entweder der Schnittpunkt — P_{1i} — von C_i P mit L_1 oder der Schnittpunkt — P_{2i} — von C_i P mit L_2. P_{1i} P_{2i} sind imaginäre Punkte auf Geraden — ϱ_1 ϱ_2 — durch C_1 C_2. Beide Geraden haben in Bezug auf L_1^2 resp. L_2^2 den nämlichen Punkt — P_{ϱ_1} — auf p zum Pole. Ob nun die zwei Leitcurven von K_i^2 reell sind oder ob eine reell, die andere imaginär ist, stets muss P_{ϱ_1} in Bezug auf eine dieser Leitcurven — natürlich in Bezug auf eine reelle — ein hyperbolischer Punkt sein. Wir nehmen an P_{ϱ_1} sei in Bezug auf L_1^2 hyperbolisch. Dann gehen durch P_{1i} zwei Tangenten — t_{1i} t_{1i}^* — an L_1^2, deren reelle Punkte — T_1 T_1^* — auf einer Geraden durch P_{ϱ_1} liegen.

Diese ist ein Strahl des gemeinsamen Paares — $g g^*$ — der Involution harmonischer Polaren um P_{ϱ_1} in Bezug auf L_1^2 und derjenigen Involution, welche P_{1i} aus P_{ϱ_1} projicirt. Um zu entscheiden, auf welcher der zwei Geraden $g\, g^*$ die Punkte $T_1\, T_1^*$ liegen müssen, bemerken wir, dass letztere in Bezug auf L_1^2 elliptische Punkte sind. P_{ϱ_1} ist aber in Bezug auf L_1^2 hyperbolisch. Also muss die durch P_{ϱ_1} gehende Gerade $T_1\, T_1^*$ den Kegelschnitt L_1^2 reell schneiden. Unter den Geraden $g\, g^*$ ist aber stets eine und nur eine, welche L_1^2 reell schneidet, weil $g\, g^*$ ein Paar der Involution harmonischer Polaren um einen hyperbolischen Punkt ist. Wir nehmen nun an, dass $T_1\, T_1^*$ auf g liegen, und erwähnen noch, dass diese Punkte durch P_{ϱ_1} und den Schnittpunkt — G — von g mit ϱ_1 harmonisch getrennt werden. Daraus folgt, dass die reellen Tangenten — $t\, t^*$ — durch P mit den Geraden nach P_{ϱ_1} und G eine harmonische Gruppe bilden.

Diese Construction von $t\, t^*$ vereinfacht sich, wenn der reelle Punkt in einer Leitcurvenebene liegt. Ist er ein Punkt einer Leitcurve, so repräsentirt seine Tangente zwei zusammenfallende reelle Tangenten an K_i^2.

Sei P_1 in L_1 gelegen und in Bezug auf L_1^2 hyperbolisch, so gehen durch ihn zwei reelle Tangenten — $t_1\, t_1^*$ — an L_1^2, welche zugleich die reellen Tangenten durch P_1 an K_i^2 sind. Schneiden wir die Ebene L_2 mit $P_1\, C_i$, so gehen durch den Schnittpunkt — P_{2i} — zwei imaginäre Tangenten an L_2^2. Ihre reellen Punkte müssen in den reellen Trägern der Tangentialebenen liegen, welche durch P_1 an K_i^2 gehen, d. h. in den Punkten, welche $t_1\, t_1^*$ aus p schneiden. Indem wir eine analoge Schlussweise für die hyperbolischen Punkte von L_2 durchführen, ergibt sich:

Projiciren wir die reellen hyperbolischen Punkte der

einen Leitcurvenebene aus C_i auf die andere, so erhalten wir imaginäre Punkte, deren Tangenten an die resp. Leitcurve die Gerade p reell schneiden.

Sei P_1 in Bezug auf L_1^2 ein elliptischer Punkt, so schneiden wir die Ebene L_2 mit der Geraden $P_1 C_i$.

Der Schnittpunkt P_{2i} liegt auf einer Geraden ϱ_2 durch C_2. Aus ihm construiren wir zwei imaginäre Tangenten an L_2^2. Ihre reellen Punkte $T_2 T_2^*$ liegen auf einer Geraden durch den in p befindlichen Pol — P_{ϱ_2} — von ϱ_2. Diese Gerade ist entweder p oder $P_{\varrho_2} C_2$, da diese Linien an Stelle von $g\, g^*$ der allgemeinen Construction treten. Würden die Punkte $T_2 T_2^*$ in p liegen, so gingen durch sie und P_1 reelle Tangenten an L_1^2. Dieses widerspricht der Annahme, dass P_1 in Bezug auf L_1^2 ein elliptischer Punkt ist. Folglich müssen die Punkte $T_2 T_2^*$ auf der Geraden $P_{\varrho_2} C_2$ liegen. Wir erwähnen noch, dass $(P_{\varrho_2} C_2 T_2 T_2^*) = -1$.

Zu einem analogen Resultate gelangen wir, indem wir von einem Punkte von L_2 ausgehen, der in Bezug auf L_2^2 elliptisch ist. Wir schliessen daher:

Durch jeden reellen Punkt der Ebenen $L_1 L_2$, welcher in Bezug auf L_1^2 resp. L_2^2 elliptisch ist, gehen zwei reelle Tangenten an K_i^2, welche mit C_2 resp. C_1 in einer Ebene liegen. Sie bilden mit den resp. Geraden nach C_2 und C_1 und nach dem Schnittpunkte ihrer Ebene mit p eine harmonische Gruppe.

Sei nun in einer der Leitcurvenebenen — etwa in L_1 — eine Gerade g gegeben, welche L_1^2 reell schneidet und p in einem Punkte — P_{ϱ_1} — trifft, der in Bezug auf L_1^2 hyperbolisch ist. Wir fragen nach den reellen Tangenten von K_i^2, welche in den Ebenen durch g liegen. Zur Beantwortung dieser Frage construiren wir zu P_{ϱ_1} die Polare ϱ_1 in Bezug auf L_1^2. Weiter zeichnen wir zu g den

correspondirenden Strahl g^* in der Involution harmonischer Polaren um P_{ϱ_1}. G G* seien die Schnittpunkte von $g\,g^*$ mit ϱ_1. Indem wir aus diesen die Paare der Involution J_c projiciren, erhalten wir zwei zu einander projective Büschel, welche einen Kegelschnitt — K_p^2 — erzeugen. Jeder Punkt — P — dieses Kegelschnittes projicirt ein Paar der Involution J_c in die Punkte G G*. Construiren wir jetzt in der oben besprochenen Weise aus einem solchen Punkte P die Tangenten an K_i^2, so liegen diese in einer durch g gehenden Ebene. K_p^2 enthält den Punkt P. Also wird jede Ebene durch g aus K_p^2 einen reellen Punkt schneiden und somit zwei reelle Tangenten von K_i^2 enthalten.

Liegt g in L_2, so können wir eine analoge Schlussweise durchführen und sagen daher:

In jeder rellen Ebene, welche eine Leitcurve reell schneidet und p in einem Punkte trifft, der in Bezug auf diese Leitcurve hyperbolisch ist, liegen zwei reelle Tangenten an K_i^2 und: *Die reellen Tangenten von* K_i^2, *welche die nämliche Gerade einer Leitcurvenebene treffen, schneiden sich paarweise in Punkten eines Kegelschnittes.*

Ausgeschlossen von den vorstehenden Ueberlegungen sind die reellen Tangenten an K_i^2, welche im Falle des hyperbolisch-imaginären Kegels in den Tangentialebenen durch c liegen.

Geben wir eine imaginären Gerade erster Art — g_i — so können wir ihre Schnittpunkte mit K_i^2 zeichnen, indem wir durch g_i und C_i eine Ebene legen. Diese trifft jede der Leitcurven in zwei imaginären Punkten, welche auf zwei Erzeugenden des Kegels liegen und g_i in den gesuchten Schnittpunkten treffen. Die Construction, welche dieser dual gegenübersteht, führt zu den zwei Tangentialebenen, welche aus einem imaginären Punkte an K_i^2 gehen.

Indem wir noch darauf hindeuten, dass sich im Falle des parabolisch-imaginären Kegels leicht zu erkennende Specialisirungen des Bewiesenen ergeben, besprechen wir zum Schlusse die *Schnitte einer reellen Ebene* E *mit* K_i^2.

Wir wollen dieselben — im Gegensatze zu den imaginären Kegelschnitten, welche Leitcurven eines Polarsystemes sind — als *imaginäre Kegelschnitte erster Art**) bezeichnen. Wir gruppiren sie nach folgenden Gesichtspunkten:

a) K_i^2 *sei ein hyperbolisch-imaginärer Kegel.*

1. Die Schnittcurve — C_i^2 — mit der Ebene E hat vier reelle Punkte. Dann hat sie auch vier reelle Tangenten mit imaginären Berührungspunkten. Zwei dieser Tangenten sind die Schnittlinien von E mit den Tangentialebenen durch c. Zwei weitere müssen existiren, weil E die Leitcurven reell schneidet und p in einem Punkte trifft, der in Bezug auf eine der Leitcurven hyperbolisch ist.

2. C_i^2 hat zwei reelle und zwei conjugirt imaginäre Punkte. Die Curve hat wenigstens zwei reelle Tangenten mit imaginären Berührungspunkten, kann aber auch vier haben.**)

---

*) Diese Kegelschnitte stehen auf derselben Stufe wie die in meiner Abhandlung über imaginäre ebene Dreiecke behandelten imaginären Dreiecke erster Art. In gleicher Weise wie wir dieselben dort durch Imaginärprojection aus einem reellen Dreieck ableiteten, so können wir die imaginären Kegelschnitte erster Art aus einem reellen — etwa durch die Imaginärprojection $(C s \Delta_c)$ oder $(C i \Delta)$ — ableiten. Diese Behandlung führt zu speciellen Kegelschnittbüscheln, welche derartige imaginäre Kegelschnitte erster Art definiren.

**) Der Fall, dass E aus K_i^2 einen Kegelschnitt schneide, welcher zwei Paare von conjugirt imaginären Punkten hat, ist nicht möglich. Denn E muss p in einem Punkte treffen, der in Bezug auf eine Leitcurve elliptisch und in Bezug auf die andere hyperbolisch ist. Also muss E die erste Leitcurve immer reell schneiden.

b) K_i^2 sei ein elliptisch-imaginärer Kegel.

1. Die Schnittfigur hat zwei reelle und zwei conjugirt imaginäre Punkte. Sie hat dann stets zwei reelle Tangenten mit imaginären Berührungspunkten. Denn E kann einzig die Leitcurve reell treffen, in Bezug auf welche p nur hyperbolische Punkte enthält.

2. C_i^2 hat zwei Paare von conjugirt imaginären Punkten. Die Curve kann keine reellen Tangenten besitzen.

c) K_i^2 sei ein parabolisch-imaginärer Kegel.

1. C_i^2 hat einen reellen Punkt mit einer reellen Tangente und zwei weitere reelle Punkte. Dann muss C_i^2 zwei reelle Tangenten mit imaginären Berührungspunkten besitzen.

2. C_i^2 hat einen reellen Punkt mit einer reellen Tangente und zwei conjugirt imaginäre Punkte. Die Curve hat keine weiteren reellen Tangenten.

Specialisirungen dieser allgemeinen Formen treten auf, wenn E eine ausgezeichnete Lage hat.

E kann z. B. durch einen reellen Schnittpunkt beider Leitcurven oder durch eine reelle Tangente beider Leitcurven gehen. In beiden Fällen hat C_i^2 eine reelle Tangente mit einem reellen Berührungspunkte.

Oder E geht durch p. Dann hat im Falle des hyperbolisch-imaginären Kegels C_i^2 zwei reelle Tangenten mit reellen Berührungspunkten u. dgl. m.

Ueber eine ebene Reciprocität und ihre Anwendung auf ebene Curven.*)

Tafel I. Fig. 9—13.

1.

Seien A B C die Ecken, a b c die ihnen gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks. Mit $p_a\, p_b\, p_c$ bezeichnen wir die Geraden, welche einen beliebigen Punkt in der Ebene des Dreiecks mit A B C verbinden. $P_a\, P_b\, P_c$ seien die Schnittpunkte einer durch P gehenden Geraden p mit den Seiten a b c. Dann können wir beweisen, dass

$$(p\, p_a\, p_b\, p_c) = (P\, P_a\, P_b\, P_c) \text{ ist.}$$

Schneiden wir nämlich das Büschel $p\, p_a\, p_b\, p_c$ mit a und sei H der Schnittpunkt von a mit P A, so erhalten wir die Projectivität: $(p\, p_a\, p_b\, p_c) \,\overline{\wedge}\, (P_a\, H\, B\, C)$. Letztere Gruppe projiciren wir aus A und schneiden das hierdurch erhaltene Büschel mit p. Dann ist: $(P_a H B C) \,\overline{\wedge}\, (P_a P P_c P_b)$. Weil aber allgemein $(P_a\, P\, P_c\, P_b) = (P\, P_a\, P_b\, P_c)$, so folgt $(p\, p_a\, p_b\, p_c) = (P\, P_a\, P_b\, P_c)$ was zu beweisen war.

---

*) Vgl. A. Ameseder: Ueber ein Nullsystem zweiten Grades. Sitzungsberichte der k. Academie der Wissenschaften. Bd. LXXXIII. II. Abth. Februar-Heft. Jahrg. 1881. Dort wird die Reciprocität (C B A $\varDelta$) von anderem Gesichtspunkte aus besprochen. Die aus derselben hervorgehende Erzeugung von Curven 4 ter Ordnung mit drei Doppelpunkten habe ich in meiner Abhandlung über centrische Collineationen n ter Ordnung (Vierteljahrsschrift der Zürcher naturforschenden Gesellschaft 1881. Bd. XXVI. S. 297) und in der Abhandlung über Curven 4 ter Ordnung mit drei doppelten Inflexionscurven (Schlomilch: Zeitschrift für Mathematik und Physik XXX) benutzt.

Es knüpft sich an diesen Satz folgende Aufgabe: Durch einen Punkt — P — der Ebene soll eine Gerade p gezogen werden, welche die Seiten eines Dreiecks in der Weise schneidet, dass P mit den Schnittpunkten — in vorgeschriebener Reihenfolge — ein gegebenes Doppelverhältniss bildet. Um diese Aufgabe zu lösen, verbinden wir P mit den Ecken des Dreiecks. Dann wird p nach der Relation $(p_c\, p_b\, p_a\, p) = \varDelta$ gefunden. Da es zu drei Geraden sechs gibt, welche mit jenen ein vorgeschriebenes Doppelverhältniss bilden, so schliessen wir:

Wir können die Seiten eines Dreiecks mit sechs Geraden durch einen gegebenen Punkt so schneiden, dass dieser Punkt mit den Schnittpunkten das Doppelverhältniss $\varDelta$ bildet.

Die Aufgabe, welche der besprochenen dual gegenüber steht, verlangt in einer Geraden p diejenigen Punkte, von denen aus nach den Ecken eines Dreiecks Strahlen gehen, welche mit p ein bestimmtes Doppelverhältniss bilden. Es gibt sechs solche Punkte. Sie bilden resp. mit den Punkten, welche p aus den Seiten des in Rede stehenden Dreiecks schneidet, das Doppelverhältniss $\varDelta$.

2.

Eindeutig sind die erwähnten Aufgaben, wenn wir die Ecken und Seiten des Dreiecks festsetzen und die Reihenfolge angeben, in welcher die Punkte in p resp. die Strahlen durch P mit P resp. p das Doppelverhältniss $\varDelta$ bilden. Durch diese Festsetzung wird jedem Punkte P eine und nur eine Gerade p zugeordnet, für welche $(p_c\, p_b\, p_a\, p) = \varDelta$ ist. Auf jeder Geraden p liegt aber nur ein Punkt P, der durch die Bedingung $(P_c\, P_b\, P_a\, P) = \varDelta$ bestimmt ist. Es wird also auf diese Weise eine eindeu-

tige Correspondenz zwischen den Punkten und Geraden der Ebene festgelegt. Jeder Punkt geht durch eine Gerade, jede Gerade enthält ihren Punkt.

Entsprechend den Bestimmungsstücken wollen wir diese Reciprocität mit dem Symbol (C B A $\varDelta$) oder ($c\,b\,a\,\varDelta$) bezeichnen.

Sei nun C_n eine Curve $n$ter Classe in der Ebene der Reciprocität. Wir fragen dann nach dem Orte der Punkte, welche den Tangenten von C_n in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) entsprechen. Wir haben also in jeder Tangente p von C_n die Schnittpunkte $P_a\,P_b\,P_c$ mit den Seiten $a\,b\,c$ des Dreiecks A B C zu bestimmen und je einen Punkt P zu construiren, für den $(P_c\,P_b\,P_a\,P) = \varDelta$ ist. Für diese Construction geben wir eine räumliche Interpretation. Wir betrachten P_c als Fusspunkt einer Normalen — n_c — zur Ebene der Reciprocität. In n_c bestimmen wir zwei Punkte — $C_1\,C_2$ — in der Weise, dass $\frac{P_c C_1}{P_c C_2} = \varDelta$ ist. Weiter errichten wir in P_b eine Normale — n_b — zur Ebene der Reciprocität. Ziehen wir jetzt $C_1\,P_a$ und schneide diese Gerade aus n_b den Punkt S, so trifft $S\,C_2$ die Ebene der Reciprocität in P.

Um diese Construction auf allen Tangenten von C_n durchzuführen, denken wir uns in c und b die resp. Ebenen C, B bestimmt, welche zur Ebene der Reciprocität senkrecht stehen. Dann ziehen wir in der Ebene C zwei durch B gehende Gerade — $c_1\,c_2$ — von der Art, dass $\frac{tg\;c\,c_1}{tg\;c\,c_2} = \varDelta$ ist. Die Tangente von C_n betrachten wir als Spuren von Normalebenen. Diese umhüllen somit einen zur Ebene der Reciprocität senkrechten Cylinder — C_{yn} — der $n$ten Classe. Jede derselben schneidet aus $c_1\,c_2$

ein Punktepaar — $C_1 C_2$ — und aus a einen Punkt P_a. Ziehen wir $C_1 P_a$ und treffe diese Linie B in S, so schneidet $S C_2$ aus der Ebene der Reciprocität einen Punkt P. $S C_2$ aber ist eine Tangente des Cylinders C_{yn}.

Bemerken wir jetzt, dass alle Linien $C_1 P_a$ in der Ebene durch c_1 und a liegen, so folgt, dass alle Punkte S in der Schnittlinie — s — der letztern Ebene mit der Ebene B sich befinden. Also stellen uns die Linien $S C_2$ die Gesammtheit der Geraden vor, welche die windschiefen Geraden $s_1 c_2$ schneiden und den Cylinder C_{yn} berühren. Sie erfüllen eine Regelfläche — R^{2n} — vom Grade $2n$. Wir können nämlich beweisen, dass eine beliebige Gerade g des Raumes $2n$ der Linien $S C_2$ schneidet. Zu diesem Zwecke betrachten wir das Hyperboloid H^2, welches durch die Geraden s, c_2 und g bestimmt wird. Dieses hat $2n$ Tangentialebenen mit C_{yn} gemein. Wir erhalten dieselben, indem wir den Cylinder 2 ter Classe — C_{y2} — zeichnen, der aus dem unendlich fernen Punkte von C_{yn} an H^2 gelegt werden kann. Die gemeinsamen Tangentialebenen zwischen C_{yn} und C_{y2} sind zugleich Tangentialebenen an C_{yn} und H^2. Sie schneiden c_2 und s in Punkten, deren resp. Verbindungslinien zu den Geraden $S C_2$ gehören und auf H_2 liegen. Also müssen sie g schneiden. Folglich wird, wie behauptet, g von $2n$ Linien $S C_2$ getroffen. Schneiden wir R^{2n} mit der Ebene der Reciprocität, so erhalten wir den Ort der Punkte P. Dieser ist nach dem bewiesenen eine Curve der $2n$ ten Ordnung — C^{2n} — und wir sagen:

Den Tangenten einer Curve von der n ten Classe correspondiren in der Reciprocität ($C\,B\,A\,\Delta$) Punkte, deren Ort eine Curve $2n$ ter Ordnung ist.

Wir können diess auch so ausdrücken:

Construiren wir zu den Punkten, in welchen die Tangenten einer Curve n ter Classe die Seiten eines Dreiecks schneiden, je den Punkt, welcher mit jenen — in vorgeschriebener Reihenfolge — ein bestimmtes Doppelverhältniss Δ bildet, so ist der Ort dieses Punktes eine Curve von der 2 n ten Ordnung.

3.

Die Untersuchung der Regelfläche R^{2n} gibt uns weiteren Aufschluss über die Curve C^{2n}. Aus der gegebenen Erzeugungsweise von R^{2n} folgt, dass sowohl durch jeden Punkt von s wie von c_2 n Gerade der Regelfläche R^{2n} gehen. Also sind s und c_2 n fache Linien dieser Fläche. *Mithin ist B und C ein n facher Punkt der Curve* C^{2n}.

Eine weitere n fache Linie von R^{2n} ist die Schnittlinie der Ebenen B und C. Sie trifft die Ebene der Reciprocität in A. *Also ist auch A ein n facher Punkt von* C^{2n}.

Hat C_n eine r fache Tangente $- t_r -$ so schneidet die Ebene, welche durch t_r geht und zur Ebene der Reciprocität normal steht, aus c und s Punkte, deren Verbindungslinie eine r fache Gerade von R^{2n} ist. Letztere trifft die Ebene der Reciprocität in einem r fachen Punkte von C^{2n}. Also folgt: *Auf den r fachen Tangenten von C_n liegen r fache Punkte von* C^{2n}.

Sei g eine Gerade in der Ebene der Reciprocität, so fragen wir nach der Construction der Schnittpunkte von C^{2n} mit g. Um diese durchzuführen, bestimmen wir das Hyperboloid H^2, welches durch s, c_2 und g gegeben ist und zeichnen den zur Ebene der Reciprocität normalen Cylinder C_{y2} an H^2. Dieser schneidet die Ebene der Reciprocität in einem Kegelschnitt K_g^2. Seine gemein-

samen Tangenten mit C_n sind Spuren von Tangentialebenen, welche H^2 und C_{yn} gemeinsam sind. Folglich schneiden diese Tangenten aus g die gesuchten Punkte von C^{2n}.

Zur Construction von K_g^2 bemerken wir Folgendes: Die Geraden $g\,a\,c_2$ und s liegen auf dem Hyperboloid H^2. C und B sind Tangentialebenen dieses Hyperboloides, welche auch den Cylinder C_{y2} berühren. Daraus folgt, dass g, a, c, b Tangenten des Kegelschnittes K_h^2 sind. Wir bestimmen diesen Kegelschnitt vollends, indem wir die zweite Gerade h des Hyperboloides H^2 zeichnen, welche in der durch g gehenden Normalebene G zur Ebene der Reciprocität liegt. Diese schneidet resp. $c_1 c_2\,a\,b\,c$ in Punkten $C_1\,C_2\,P_a\,P_b\,P_c$. Ziehen wir dann $C_1\,P_a$, so trifft diese Linie s im Schnittpunkte S der Ebene G mit s. Die Verbindungslinie SC_2 ist die gesuchte Gerade h. Sie schneidet g in einem Punkte G, welcher der Berührungspunkt der Tangentialebene G an H^2 und mithin der Berührungspunkt von g an K_g^2 ist. Zugleich ersehen wir aus der Construction von G, dass dieser Punkt mit $P_a P_b P_c$ durch die Relation $(P_c\,P_b\,P_a\,G) = \Delta$ verbunden ist. G ist also der correspondirende zu g in der Reciprocität $(CBA\Delta)$.

Die Construction der Schnittpunkte von g mit C^{2n} lässt sich nach dem Gesagten dahin zusammenfassen: *$a\,b\,c\,g$ und der entsprechende Punkt zu g bestimmen als vier Tangenten und Berührungspunkt in einer einen Kegelschnitt, dessen gemeinsame Tangenten mit C_n die Gerade g in Punkten von C^{2n} treffen.*

Berührt der Kegelschnitt K_g^2 die Curve C_n, so schneidet die Tangente im Berührungspunkte aus g zwei benachbarte Punkte von C^{2n} d. h. g berührt in diesen Punkten C^{2n}. Wir können dies dahin verallgemeinern: Hat K_g^2

in p Punkten mit C_n eine einfache Berührung, so ist g eine $p$fache Tangente an C^{2n}. Osculirt K_g^2 die Curve C_n, so ist g eine Wendetangente an C^{2n} u. s. f.

4.

Zu jeder Geraden g der Ebene gehört ein Kegelschnitt K_g^2. Alle diese Kegelschnitte haben $a\,b\,c$ zu gemeinsamen Tangenten, bilden folglich ein Netz und die Geraden g stehen zu den Kegelschnitten dieses Netzes in der Beziehung einer quadratischen Transformation. Um in derselben zu einem Kegelschnitt K_g^2 die correspondirende Gerade zu finden, heben wir folgende Eigenschaften von K_g^2 hervor: Sei t eine beliebige Tangente an K_g^2, so geht durch dieselbe eine Tangentialebene T an H^2. In dieser muss eine Gerade h des letzterwähnten Hyperboloides liegen. h ist die Verbindungslinie der Punkte, in welchen T die Geraden s und c_2 schneidet, und trifft die Ebene der Reciprocität in einem Punkte P von g. Seien dann die Punkte, in denen t die Geraden $c\,b\,a$ schneidet, resp. durch $P_c\,P_b\,P_a$ bezeichnet, so wird die gegebene Construction des Punktes P durch die Relation $(P_c\,P_b\,P_a\,P) = \varDelta$ ausgedrückt, d. h. P ist der correspondirende Punkt zu t in der Reciprocität $(C\,B\,A\,\varDelta)$. Nun war t eine beliebige Tangente an K_g^2. Wir sagen also: Die Punkte, welche in der Reciprocität $(C\,B\,A\,\varDelta)$ den Tangenten von K_g^2 entsprechen, liegen auf *der* Geraden g, welche in der quadratischen Transformation dem Kegelschnitt K_g^2 entspricht.

In jedem nicht singulären Punkte von C_n berührt ein Kegelschnitt K_g^2 diese Curve. Ihm correspondirt in der quadratischen Transformation eine Gerade, welche C^{2n} berührt. Somit *erscheint C^{2n} als die Enveloppe aller der*

Geraden, welche in der quadratischen Transformation den Kegelschnitten entsprechen, die C_n berühren.

Damit ist das Mittel gegeben, um in einem nicht singulären Punkte P von C^{2n} auf lineare Weise die Tangente zu zeichnen. Wir bestimmen die entsprechende Gerade p zu P in der Reciprocität (C B A $\varDelta$). Dann construiren wir den Berührungspunkt dieser Geraden an C^n. In ihm wird p von einem Kegelschnitt K_g^2 berührt. An denselben geht durch P eine zweite Tangente, welche in P die Curve C^{2n} berührt.

Sollen die Tangenten aus einem beliebigen Punkte X der Ebene an C^{2n} gezogen werden, so bemerken wir, dass den Geraden durch x in der quadratischen Transformation die Kegelschnitte einer Schaar correspondiren; denn diese werden ausser von $a\,b\,c$ noch von derjenigen Geraden x berührt, welche X in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) entspricht. Denjenigen unter diesen Kegelschnitten, welche C_n berühren, correspondiren in der quadratischen Transformation die Tangenten durch X an C^{2n}.

Ist ein in C^{2n} gelegener Punkt D zugleich Berührungspunkt der entsprechenden Geraden d an C_n, so ist D ein gemeinsamer Punkt von C^{2n} und C_n. Construiren wir in ihm auf die oben angegebene Weise die Tangente an C^{2n}, so finden wir, dass diese mit d zusammenfällt.

Wir können dies auch so ausdrücken:

Correspondirt einem gemeinsamen Punkte von C_n und C^{2n} in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) *die Tangente in ihm an C_n, so berühren sich in diesem Punkte die Curven C_n und C^{2n}.*

5.

Indem wir das Dreieck A B C festhalten, wollen wir $\varDelta$ alle möglichen reellen Werthe geben. Zu jedem der-

selben gehört ein Linienpaar c_2 und s. Seien z. B c_2^* und s^* die Geraden, welche Δ^* zugeordnet sind und sei C^{2n} die Curve, welche wir in der Reciprocität (C B A Δ) aus C_n abgeleitet haben, so untersuchen wir jetzt die Enveloppe der Geraden, welche den Punkten von C^{2n} in der Reciprocität (C B A Δ^*) entsprechen. Durch jeden Punkt P von C^{2n} geht eine Transversale t^* zu c_2^* und s^*. Legen wir durch eine derselben eine Normalebene — P — zur Ebene der Reciprocität, so trifft P die resp. Geraden $a\,b\,c$ in Punkten $P_a^*\,P_b^*\,P_c^*$ einer Geraden p^* und es gilt die Relation $(P_c^*\,P_b^*\,P_a^*\,P^*) = \Delta^*$. p^* ist also die entsprechende zu p in der Reciprocität (C B A Δ^*).

Wir erhalten mithin die Enveloppe der p^*, indem wir an die Regelfläche der t^* einen Cylinder C_{yn}^* legen, dessen Richtung normal zur Ebene der Reciprocität ist. Er schneidet letztere Ebene in den p^*. Nun sind die Geraden t^* Transversalen zu den drei Leitlinien C^{2n} c_2^* s^*, von denen c_2^* und s^* mit C^{2n} je einen $n$fachen Punkt gemein haben. Folglich erfüllen die Linien t^* eine Regelfläche — R^{2n*} — deren Grad gleich $2 \,.\, 2n - 2n = 2n$ ist.

Ein Berührungscylinder an diese Fläche ist im Allgemeinen von der $2n$ten Classe.

Betrachten wir speciell den Cylinder C_{yn}^* und construiren wir an ihn die Tangentialebenen, welche durch eine Normale — p — zur Ebene der Reciprocität gehen, so bemerken wir, dass n von diesen Ebenen in die Ebene $p\,B$ und n in die Ebene $p\,C$ zusammenfallen. Daraus folgt, dass die Ebenenbüschel, welche in B und C zur Ebene der Reciprocität senkrecht stehen, Theile des erwähnten Cylinders sind. Der Rest desselben ist somit ein Cylinder der $n$ten Classe. Er schneidet die Ebene der

Reciprocität in einer Curve der n ten Classe C_n^*. Also umhüllen die p^* eine Curve der n ten Classe.

Zu jedem Werthe von $\varDelta$ gehört eine solche Curve der n ten Classe. Aus ihr kann C^{2n} in einer Reciprocität der betrachteten Art abgeleitet werden und es gelten für sie die Beziehungen, welche wir oben zwischen C^{2n} und einer Curve C_n entwickelt haben. Daraus folgt, dass alle diese Curven C_n dieselben Charaktere haben müssen.

Sei P ein Punkt von C^{2n} und p eine durch P gehende Gerade, so ist durch P und die Schnittpunkte von p mit den Seiten des Dreiecks $a\,b\,c$ das Doppelverhältniss $\varDelta$ einer Reciprocität (A B C $\varDelta$) festgesetzt. Ziehen wir dann durch weitere Punkte von C^{2n} diejenigen Geraden, welche diesen Punkten in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) entsprechen, so umhüllen diese Geraden eine Curve der n ten Classe. Wir können dies so ausdrücken:

Alle die Geraden, welche die Seiten des Dreiecks abc und C^{2n} in resp. Punktegruppen von constantem Doppelverhältniss treffen, umhüllen eine Curve n ter Classe.

6.

Wir untersuchen jetzt die Enveloppe der Geraden, welche in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) den Punkten P einer Curve n ter Ordnung — C^n — entsprechen. Wir stellen damit eine Frage, welche der unter 2 behandelten dual gegenübersteht. Sie führt zu Sätzen, welche den oben gegebenen dual sind. Wir unterlassen es, diese hier weiter auszuführen und begnügen uns für den directen Beweis derselben eine räumliche Darstellung zu geben.

Zu diesem Zwecke gehen wir von dem Ausdrucke $(p_c\, p_b\, p_a\, p) = \varDelta$ aus und übertragen die Construction desselben auf den Raum. Wir errichten in B und C die

resp. Normalen n_b und n_c zur Ebene der Reciprocität. In n_c construiren wir zwei Punkte $C_1 C_2$, welche der Bedingung genügen: $CC_1 : CC_2 = \varDelta$. Dann legen wir durch C_1 und p_a eine Ebene. Sie treffe n_b in einem Punkte S. Durch diesen, durch P und C_2 geht eine Ebene. Sie schneidet die Ebene der Reciprocität in p.

Lassen wir P sich auf C^n bewegen, so bilden alle Ebenen, welche durch C_1 und die p_a gehen, ein Büschel, dessen Scheitelkante $C_1 A$ — sagen wir a_1 — ist. Dieses schneidet n_b in einer Punktereihe S. Es sind also die Geraden — t — welche die in den Ebenen durch a_1 liegenden Punkte P mit den resp. Punkten S verbinden, die gemeinsamen Transversalen zu a_1, n_b und C^n. Folglich erfüllen sie eine Regelfläche des 2nten Grades — R^{2n}. Legen wir durch C_2 und diese Geraden t Ebenen, so schneiden letztere die Ebene der Reciprocität in den Geraden p, welche den Punkten P in der Reciprocität $(CBA\varDelta)$ entsprechen. Diese Ebenen durch C_2 bilden den Kegel aus C_2 an R^{2n}, also einen Kegel der $2n$ten Classe. Er trifft die Ebene der Reciprocität in einer Curve der $2n$ten Classe. Daraus ergeben sich Sätze, welche den in 2 hervorgehobenen dual sind.

Seien aus einem Punkte G der Ebene die Tangenten an C_{2n} zu bestimmen, so benutzen wir das Hyperboloid H^2, welches durch die windschiefen Geraden a_1 n_b und $\overline{GC_2}$ bestimmt wird. Dieses trifft die Ebene der Reciprocität in einem Kegelschnitt K_g^2.

Sei P ein gemeinsamer Punkt von K_g^2 und C^n, so geht durch ihn eine Transversale t zu a_1 und n_b, welche sowohl auf H^2 wie auf R^{2n} liegt. Sie wird also die Gerade $\overline{GC_2}$ schneiden und mit C_2 eine Tangentialebene an R^{2n} bestimmen. Diese trifft die Ebene der Reciprocität

in einer durch P und G gehenden Tangente an C_{2n}. Bemerken wir noch, dass K_g^2 durch A B C geht und in G von der Geraden g berührt wird, welche dem Punkte G in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) entspricht, so ergeben sich Schlüsse, welche den in 3 und 4 hervorgehobenen dual gegenüber stehen.

Lassen wir $\varDelta$ alle möglichen reellen Werthe annehmen, so gehört zu jedem derselben ein Punktepaar $C_1 C_2$, z. B. zu $\varDelta^*$ die Punkte $C_1^* C_2^*$. Halten wir dann die jetzt gefundene Curve C_{2n} fest, so ist der Kegel über ihr aus C_2^* von der $2n$ten Classe. Seien S^* die Schnittpunkte der Tangentialebenen dieses Kegels mit n_b, so ziehen wir die Gerade durch C_1 nach den S^*. Diese schneiden die Ebene der Reciprocität in Punkten P^*, denen in der Reciprocität (C B A $\varDelta^*$) die Tangenten an C_{2n} entsprechen. Der Ort der Punkte P^* ist von der $n$ten Ordnung.

Sei nämlich g eine beliebige Gerade in der Ebene der Reciprocität und schneide die Ebene durch c_1 und g aus n_b den Punkt S_g, so ziehen wir $\overline{S_g C_2}$. Diese Linie trifft die Ebene der Reciprocität in einem Punkte G, welcher in a liegt. Durch ihn gehen $2n$ Tangenten an C_{2n}. Von diesen liegen n in der Geraden a, welche für C_{2n} eine $n$fache Tangente ist. Die übrigen schneiden g in n Punkten P^*. Also liegen alle Punkte P^* auf einer Curve der $n$ten Ordnung.

Wir schliessen aus dem Gesagten, dass zu jedem reellen Werthe von $\varDelta$ eine Curve $n$ter Ordnung gehört, aus der C^{2n} in einer Reciprocität der betrachteten Art abgeleitet werden kann.

7.

Das Princip der besprochenen Reciprocität ist einer Erweiterung fähig. Wir gehen bei derselben von zwei

Geraden a, c und einer Curve $n$ter Ordnung — B^m — aus. Eine beliebige Gerade der Ebene schneide a, c, B^m in den resp. Punkten P_a, P_c, P_{b1} P_{b2} ... P_{bm}. Dann erhalten wir m Punkte $P_1 P_m$ auf p durch Construction der Relationen: $(P_c P_{b1} P_a P_1) = \varDelta = \dots (P_c P_{bm} P_a P_m)$. Hierdurch sind jeder Geraden p m ihrer Punkte zugeordnet. Wir wollen diese Reciprocität mit dem Symbol $(c B^m a \varDelta)$ bezeichnen.

Wir stellen — wie unter 2 — auch hier die Frage nach dem Orte der Punkte P, welche den Tangenten — p — einer Curve $n$ter Classe correspondiren. Wir gelangen zu demselben durch eine räumliche Darstellung, welche an die in 2 gegebene Interpretation der Construction eines Doppelverhältnisses anknüpft. Wir legen durch c eine Normalebene — C — zur Ebene der Reciprocität. In C ziehen wir durch den Schnittpunkt B von a und c zwei Gerade — $c_1 c_2$ —, welche die Bedingung erfüllen: $\frac{\operatorname{tg} c\, c_1}{\operatorname{tg} c\, c_2} = \varDelta$. B^m betrachten wir als Spur eines zur Ebene der Reciprocität normalen Cylinders B^y_m. C_n sei die Spur eines normalen Cylinders C_{yn}. Die Tangentialebenen des letztern schneiden $c_1 c_2 B^m a c$ in den resp. Punkten $C_1 C_2 P_{b1} \dots P_{bm} P_a P_c$. Die Geraden, welche die resp. Punkte $C_1 P_a$ verbinden, liegen in der Ebene $c_1 a$ und treffen B^y_m in einer Curve der $m$ten Ordnung S^m. Verbinden wir die Punkte dieser Curve mit den resp. C_2, so tangiren diese Verbindungslinien den Cylinder C_{yn} und schneiden die Ebene der Reciprocität in den Punkten P. Nun stellen die resp. Geraden $\overline{S C_2}$ die Gesammtheit aller Transversalen zu c_2 und S_m vor, welche C_{yn} tangiren. Sie liegen auf einer Regelfläche des $2mn$ten Grades — R^{2mn}. Jede Gerade g schneidet nämlich diese Fläche

in $2\,m\,n$ Punkten; denn die Transversalen zu g, c_2 und S^m liegen auf einer Regelfläche des $2\,m$ ten Grades. Diese hat $2\,m\,n$ Tangentialebenen mit C_{yn} gemeinsam, welche g in Punkten von R^{2mn} schneiden. Die Ebene der Reciprocität trifft R^{2mn} im Orte der Punkte P und wir schliessen daher:

Die Punkte, welche in der Reciprocität ($c\,B^m\,a\,\Delta$) *den Tangenten einer Curve n ter Classe entsprechen, liegen auf einer Curve von der Ordnung* $2\,m\,n$.

c_2 und S^m sind n fache Linien von R^{2mn}. Mithin sind B und die Schnittpunkte von a mit B^m n fache Punkte von C^{2mn}. Die Geraden, in welchen die Ebene C den Cylinder B^y_m trifft, sind ebenfalls n fache Linien von R^{2mn}. Also sind die Schnittpunkte von c mit B^m n fache Punkte von C^{2mn}.

Von hier aus lässt sich leicht übersehen, dass ein Gedankengang, welcher analog dem (2—6) durchgeführten ist, zur Verallgemeinerung der dort gegebenen Resultate führt.

8.

Wir ziehen zum Schlusse einige Consequenzen aus dem Gesagten für $n = 1$ und $n = 2$.

a) Setzen wir $n = 1$, so folgt aus den Ausführungen von 2:

Satz: Die Punkte, welche in der Reciprocität ($C\,B\,A\,\Delta$) *den Strahlen eines Büschels correspondiren, liegen auf einem Kegelschnitt* K^2 oder:

Construiren wir zu den Punkten, in welchen die Strahlen eines Büschels die Seiten eines Dreiecks schneiden, je den Punkt, welcher mit jenen — in gleicher Reihen-

folge genommen — ein vorgeschriebenes Doppelverhältniss Δ bildet, so ist der Ort dieses Punktes ein Kegelschnitt K^2.

K^2 wird nach dem in 2 gesagten aus einem Hyperboloid H^2 geschnitten, welches durch s, c_2 und die Gerade n_p bestimmt wird, die im Scheitel P des Büschels zur Ebene der Reciprocität senkrecht steht. Also geht K^2 durch die Ecken — A B C — des Dreiecks und durch den Punkt P. Die Tangente in P an K^2 ist diejenige Gerade, welche in der Ebene der Reciprocität (C B A Δ) dem Punkte P entspricht. Um die Tangente in B zu construiren, zeichnen wir die Tangentialebene T in B an das Hyperboloid H^2. Diese geht durch c_2 und eine Gerade d, welche die Ebene durch n_p und B aus der Ebene durch C_1 und a schneidet. Die Schnittlinie der Ebene T mit der Ebene der Reciprocität ist die Tangente — b_1 — in B an K^2. Bezeichnen wir die Schnittlinie der Ebene n_p B und der Ebene der Reciprocität — also die Gerade B P — durch p, so lässt sich die angegebene Construction von b_1 durch das Symbol $(c\ p\ a\ b_1) = \Delta$ ausdrücken. Liegt P auf einer der Seiten des Dreiecks A B C — etwa auf a — so degenerirt K^2 in zwei Gerade. Die eine ist a; die andere geht durch A und bildet mit c, b und A P das Doppelverhältniss Δ.

Geben wir einen Kegelschnitt durch 5 Punkte, so können wir diese zu 10 verschiedenen Dreiecken anordnen. Die Seiten *eines* solchen Dreiecks werden von der Verbindungslinie der 2 übrigen unter den 5 Punkten in 3 Punkten geschnitten. Diese bilden mit jedem von jenen 2 Punkten 6 Doppelverhältnisse von verschiedenem Werthe. Durch jedes derselben und das in Rede stehende Dreieck wird eine Reciprocität (C B A Δ) festgesetzt. In

allen diesen Reciprocitäten erscheint der durch 5 Punkte bestimmte Kegelschnitt als Ort von Punkten, welche den Strahlen eines Büschels entsprechen. Indem wir also in irgend einem Punkte P eines Kegelschnittes eine derartige Reciprocität festsetzen, können wir sagen:

Satz: Die Geraden, welche durch einen Punkt P eines Kegelschnittes gehen, schneiden aus den Seiten eines Dreiecks, das dem Kegelschnitt eingeschrieben ist, Punkte, welche — in gleicher Reihenfolge genommen — mit dem zweiten Schnittpunkte der Geraden und des Kegelschnittes das nämliche Doppelverhältniss Δ bilden.

Halten wir A B C fest, so finden wir für jeden Punkt P des Kegelschnittes ein Δ. Geben wir Δ, so erhalten wir den zugehörigen Punkt P, indem wir in B die Tangente b_1 construiren und eine Gerade p zeichnen, für welche $(c\,p\,a\,b_1) = \Delta$ ist. Der zweite Schnittpunkt von p mit K^2 ist P.

Damit ist die Aufgabe gelöst, die Seiten eines Dreiecks, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, durch eine Gerade so zu schneiden, dass die Schnittpunkte mit einem Punkte des Kegelschnittes — in vorgeschriebener Reihenfolge — ein gegebenes Doppelverhältniss bilden. Es gibt unendlich viele Gerade, welche dieser Bedingung genügen. Sie gehen alle durch einen Punkt des Kegelschnittes.

b) Seien $p_1\,p_2$ zwei Gerade durch P. Ihre Schnittpunkte mit $a\,b\,c$ seien P_{a1}, P_{b1}, P_{c1} und P_{a2}, P_{b2}, P_{c2}. Ihre zweiten Schnittpunkte mit K^2 seien $P_1\,P_2$. Dann sagt der zuletzt hervorgehobene Satz aus, dass

$$(P_{c1}\,P_{b1}\,P_{a1}\,P_1) = (P_{c2}\,P_{b2}\,P_{a2}\,P_2).$$

Die Punkte $P_{a1} \ldots P_{a2} \ldots$ bestimmen also projectivische Reihen

auf $p_1 p_2$. Folglich sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser Reihen, d. h. $a, b, c, \overline{P_1 P_2}$ — Tangenten eines Kegelschnittes — K_1^2 — der von $p_1 p_2$ berührt wird. Wir schliessen daher:

Satz: Zwei Dreiecke, welche einem Kegelschnitt eingeschrieben sind, umhüllen einen zweiten Kegelschnitt.

c) Gegeben sei ein Viereck. $a\, b\, c\, d$ seien *die* vier Seiten desselben, von denen keine drei in einer Ecke zusammenstossen. Gesucht werden die Geraden durch einen Punkt P der Ebene, welche die Seiten $a\, b\, c\, d$ in 4 Punkten $P_a\, P_b\, P_c\, P_d$ schneiden, deren Doppelverhältniss Δ ist. Zur Lösung dieser Aufgabe betrachten wir 3 Seiten des Vierecks als die Geraden einer Reciprocität ($a\, b\, c\, \Delta$). In dieser correspondiren nach einem Satze, der dem ersten unter *a*) abgeleiteten dual ist, den Punkten der Geraden *d* die Tangenten eines Kegelschnittes K^2. An diesen gehen durch P zwei Tangenten, welche die Aufgabe lösen. Wir schliessen daher:

Satz: Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Gerade, welche die Seiten eines Vierecks, von denen keine drei in einer Ecke zusammentreffen, in vier Punkten schneiden, die — in gleicher Reihenfolge genommen — ein vorgeschriebenes Doppelverhältniss bilden. Diese Geraden umhüllen mit den erwähnten Seiten des Vierecks einen Kegelschnitt.

Ueber Curven IV. Ordnung mit einem doppelten Berührungsknoten und einem Doppelpunkte.

Mit 2 Tafeln. — Figur 1—13.

1.

Wir gehen von einer ebenen Reciprocität aus, welche durch zwei Gerade a, c, einen Kegelschnitt B^2 und ein Doppelverhältniss Δ festgesetzt wird, also von einer Reciprocität ($c B^2 a \Delta$)*) und untersuchen den Ort der Punkte, welche den Strahlen eines Büschels mit dem Scheitel P correspondiren. Damit specialisiren wir die in der citirten Abhandlung unter 7 gegebenen Ausführungen für $m = 2$ und $n = 1$. Wir schliessen also:

Satz. In der Reciprocität ($c B^2 a \Delta$) *correspondiren den Strahlen eines Büschels die Punkte einer Curve vierter Ordnung* — C^4 — oder: *construiren wir zu den Punkten, in welchen die Strahlen eines Büschels zwei Gerade und einen Kegelschnitt treffen, je die zwei Punkte, welche mit jenen — in gleicher Reihenfolge genommen — dasselbe Doppelverhältniss Δ bilden, so ist der Ort dieser Punkte eine* C^4.

C^4 ist der Schnitt einer Regelfläche vierten Grades — R^4 — mit der Ebene der Reciprocität. Wir construiren dieselbe, indem wir über B^2 den Cylinder B_y^2 errichten. (Fig. 1 axonometrisch.) Dieser wird von der Ebene $\hat{c_1 a}$ in einem Kegelschnitt S^2 getroffen. Dann ist R^4 der Ort

*) Vgl. die Abhandlung: Ueber eine ebene Reciprocität, insbesondere Nr. 7.

aller Geraden, die S^2, c_2 und *die* Gerade n_p schneiden, welche in P zur Ebene der Reciprocität senkrecht steht. C^4 geht durch die Punkte, in denen S^2 die Ebene der Reciprocität trifft. Es sind dies zugleich die Schnittpunkte — $C_1 C_2$ — von a mit B^2. Die Geraden n_{a1}, n_{a2}, in welchen die Ebene C den Cylinder B_y^2 schneidet, liegen auf R^4. Mithin sind die Schnittpunkte — $A_1 A_2$ — von c mit B^2 auf C^4 gelegen. c_2 und n_p sind Doppellinien von R^4. Folglich sind B und P Doppelpunkte von C^4.

Die Ebene $\hat{c_1 a}$ schneidet R^4 in S^2. Also muss sie mit R^4 noch eine Curve zweiter Ordnung gemein haben. Da S^2 im Allgemeinen weder durch B geht, noch von n_p geschnitten wird, so muss die Curve zweiter Ordnung, welche ausser S^2 noch in der Ebene $\hat{c_1 a}$ liegt, in B und in dem Schnittpunkte — D — von n_p mit $\hat{c_1 a}$ einen Doppelpunkt haben. Also muss diese Curve degeneriren und besteht aus der doppelt zu zählenden Geraden $\overline{BD}$ — sagen wir d. Mithin ist die Gerade d eine Doppellinie von R^4. Die Ebene durch d und c_2 berührt R in B. Also schneidet sie die Ebene der Reciprocität in einer Geraden — b — welche in B die Curve C^4 berührt. Diese Linie kann C^4 — ausser in B — nicht mehr schneiden. Folglich hat sie in B mit C^4 vier Punkte gemein und da sie Tangente in B ist, so folgt, dass in B zwei Doppelpunkte der C^4 zusammenfallen und dass in B die Curve C^4 sich selbst berührt. B *ist ein doppelter Berührungsknoten.*

Bezeichnen wir $\overline{BP}$ mit p, so wird die gegebene Construction von b durch die Relation $(c\,p\,a\,b) = \Delta$ ausgedrückt.

Um die Tangenten an C^4 in P zu construiren, zeichnen wir die Tangentialebenen in diesem Punkte an R^4. Dieselben gehen durch n_p. Legen wir jetzt eine Ebene

durch P und c_2, so schneidet diese R^4 — ausser in c_2 — noch in einem Kegelschnitt, der in P einen Doppelpunkt hat. Ein solcher Kegelschnitt zerfällt in zwei Gerade. Es sind dies die Verbindungslinien des Punktes P mit den Punkten — $S_1 S_2$ — in welchen die Ebene durch c_2 und P den Kegelschnitt S^2 trifft.

Die Normalen aus S_1 und S_2 auf die Ebene der Reciprocität treffen B^2 in zwei Punkten — $B_1 B_2$ — welche auf einer Geraden — b_1 — durch B liegen. Für letztere gilt die Relation $(c\, b_1\, a\, p) = \varDelta$.

Haben wir also nach derselben b_1 bestimmt und zeichnen wir die Schnittpunkte von b_1 mit B^2, so gehen durch diese die Geraden — $p_1\, p_2$ — welche C^4 in p berühren. Es sind diejenigen Linien, welche dem Punkte P in der Reciprocität $(c\, B^2\, a\, \varDelta)$ entsprechen.

Seien $t_1\, t_2$ die Tangenten, welche aus P an B^2 gezogen werden können, so entsprechen ihnen — wie sofort ersichtlich — in der Reciprocität $(C\, B^2\, a\, \varDelta)$ diejenigen Punkte, in denen die Geraden $t_1\, t_2$ die Curve C^4 berühren.

Sei x eine durch B gehende Gerade in der Ebene der Reciprocität, so fragen wir nach den Schnittpunkten von x mit C^4. Zur Beantwortung dieser Frage legen wir eine Ebene durch x und c_2 und construiren die Transversalen zu c_2, n_p und S^2, welche in dieser Ebene liegen. Wir haben also die Schnittpunkte der Ebene durch c_2 und x mit S^2 zu bestimmen. Indem wir diese Punkte mit dem Schnittpunkte der Ebene durch $c_2\, x$ und der Geraden n_p verbinden, erhalten wir die gesuchten Transversalen. Sie treffen x in zwei Punkten von C^4. Wir führen die skizzirte Construktion aus, indem wir zu x eine Gerade x_b nach der Relation $(c\, x_b\, a\, x) = \varDelta$ zeichnen. x_b trifft B^2 in zwei Punkten.

Ihre Verbindungslinien mit P schneiden aus x zwei Punkte von C^4. Drehen wir x um B, so wird durch die Bedingung $(c\, x_b\, a\, x) = \Delta$ jeder Geraden x eine Gerade x_b zugeordnet; diese Geraden $x\, x_b$ sind Paare einer Projectivität, für welche c und a die Doppelstrahlen sind. Daraus entnehmen wir folgende Erzeugungsweise von C^4:

Gegeben sei ein Kegelschnitt B^2, *eine Projectivität von Strahlen an Scheitel* B *und ein Punkt* P. *Schneidet dann ein Strahl der Projectivität aus* B^2 *die Punkte* $B_1\, B_2$, *so treffen die Verbindungslinien derselben mit* P *den entsprechenden Strahl der Projectivität in zwei Punkten von* C^4.

Durch diese Erzeugung von C^4 ist jedem Punkte von C^4 — ausgenommen B und P — ein Punkt von B^2 zugeordnet. Construiren wir die Tangenten aus B an B^2 und ihre entsprechenden Geraden — $b_1\, b_2$ — in der Projectivität P_{ac}, so sind letztere die Tangenten aus B an C^4.

2.

Sei c_{2x} eine beliebige durch B gezogene Gerade, welche nicht in der Ebene der Reciprocität liegt. Construiren wir dann eine Regelfläche — R^{4x} —, welche c_{2x}, n_p und die oben construirte Curve 4 ter Ordnung zu Leitcurven hat, so ist im Allgemeinen der Grad einer solchen Fläche gleich 8. Er wird in unserem Falle um 4 verringert, weil n_p und c_{2x} die Curve C^4 in Doppelpunkten schneiden. Construiren wir an R^{4x} in B die Tangentialebene — C_{2x} — so geht diese durch c_{2x} und durch die Gerade b, welche C^4 in B berührt. C_{2x} schneidet R^{4x} — ausser in c_{2x} — noch in einem Kegelschnitt. Weil nun b mit C^4 in B vier Punkte gemein hat, so muss dieser Kegelschnitt in B einen Doppelpunkt haben. Ein

zweiter wird der Schnittpunkt — D^x — von n_p mit C_{2x} sein. Also degenerirt der Kegelschnitt in die Gerade $\overline{BD_x}$ — sagen wir d_x — und diese ist eine doppelte Linie von R^{4x}. Jede Ebene durch d^x wird R^{4x} noch in einem Kegelschnitt treffen. Sei C_{1x} eine solche Ebene, welche durch die Gerade a der Reciprocität gehe und R^{4x} in dem Kegelschnitt S^{2x} schneide. Durch c_{2x} legen wir eine Ebene — C_x —, welche zur Ebene der Reciprocität senkrecht steht und diese Ebene in c_x, die Ebene C_{1x} in c_{1x} treffe. Mit $\varDelta_x$ wollen wir die Relation $\frac{\operatorname{tg} c_x c_{1x}}{\operatorname{tg} c_x c_{2x}}$ bezeichnen. Schliesslich construiren wir die Orthogonalprojection — B^{2x} — des Kegelschnittes S^{2x} auf die Ebene der Reciprocität. Damit haben wir eine Raumfigur hergestellt, welche analog der in 1 benutzten ist und auf dem nämlichen Wege wie diese zu Curve C^4 führt. Letztere erscheint jetzt als der Ort der Punkte, welche den Strahlen des Büschels mit dem Scheitel P in der Reciprocität ($c_x B^{2x} a \varDelta_x$) entsprechen.

Bewegt sich c_{2x} in der Ebene C, so gehört zu jeder Lage von c_{2x} eine andere Regelfläche R^{4x}. Die doppelten Geraden d_x dieser Regelflächen liegen in den Ebenen durch b und die resp. c_{2x}. Die Ebenen durch a und diese d_x schneiden aus den resp. Regelflächen R^{4x} die Kegelschnitte S^{2x} und aus der Ebene C die resp. Geraden c_{1x}. Es ist auf diese Weise jeder Geraden c_{2x} eine Gerade c_{1x} zugeordnet und für diese Geradenpaare gilt das nämliche Verhältniss $\frac{\operatorname{tg} c_x c_{1x}}{\operatorname{tg} c_x c_{2x}} = \varDelta_x$. Die Transversalen t der Regelflächen R^{4x} drehen sich um die Punkte von C^4 und liegen in Ebenen durch n_p. Folglich schneiden

diese t die Ebenen durch die d und a resp. in Punkten, welche auf Normalen zur Ebene der Reciprocität liegen*). Mithin befinden sich die Kegelschnitte S^2 auf einem zur letzteren Ebenen senkrechte Cylinder und haben dieselbe Orthogonalprojection B^2. Es führen also die jetzt betrachteten Lagen von c_{2x} zwar zu unendlich vielen Regelflächen R^{4x}, aber zu der nämlichen Reciprocität $(c_x\, B^{2x}\, a\, \Delta_x)$. Lassen wir c_{2x} die Ebene C_{2x} durchlaufen, so gehört zu jeder Lage von c_2 eine Regelfläche R^{4x}. d_x ist eine doppelte Gerade für alle diese Flächen. Also schneidet C_{1x} dieselben — ausser in d_x — noch in unendlich vielen Kegelschnitten, deren Orthogonalprojectionen auf die Ebene der Reciprocität unendlich viele Kegelschnitte — B^{2x} — sind. Legen wir dann durch die Geraden c_{2x} die Normalebenen C_x zur Ebene der Reciprocität, so erhalten wir unendlich viele Geradenpaare $c_x\, c_{1x}$, welche mit den resp. c_{2x} durch die Bedingung: $\frac{\operatorname{tg} c_x\, c_{1x}}{\operatorname{tg} c_x\, c_{2x}} = \Delta_x$ verbunden sein sollen. Wir gelangen so zu unendlich vielen Reciprocitäten $(c_x\, B^{2x}\, a\, \Delta_x)$, welche die Linie a gemeinsam haben und deren Kegelschnitte — B^{2x} — sich in 2 Punkten — $C_1\, C_2$ — auf a schneiden.

Drehen wir jetzt die Ebene C_{1x} um d_x, so schneidet jede ihrer Lagen aus den Regelflächen R^{4x} unendlich viele Kegelschnitte S^{2y}. Ihre Orthogonalprojectionen auf die Ebene der Reciprocität sind unendlich viele Kegelschnitte B^{2y}. Zu jedem derselben gehört eine Gerade c_{2x} in C_{2x} und mithin ein Δ_y. Alle Kegelschnitte B^{2y}, welche zu diesem Δ_y gehören, schneiden sich in zwei

*) In Fig. 2 sind zwei solche Transversalen — $t\, t^*$ — dargestellt, welche durch den Punkt P_1 von C^4 gehen.

Punkten einer durch B gehenden Geraden a_y. Sie ist die Schnittlinie einer Lage von C_{1x} mit der Ebene der Reciprocität. Es gehören also zu jedem C_{1x} unendlich viele Reciprocitäten (c_y B^{2y} a_y $\varDelta_y$).

Lassen wir endlich c_2 sämmtliche Normalebenen zur Ebene der Reciprocität durchlaufen, so wiederholt sich der Gedankengang, welchen wir oben für die Geraden c_2 in der Ebene C_x entwickelten. Wir gelangen zu keinen neuen Reciprocitäten. Damit haben die aber alle möglichen Lagen der Geraden c_{2x} durch B erschöpft und fassen nun das Gesagte dahin zusammen:

C^4 *liegt auf zweifach unendlich vielen Regelflächen vierter Ordnung, von denen je unendlich viele die doppelten Geraden* n_p *und* d_x *gemeinsam haben. Für je unendlich viele dieser Regelflächen liegt je ein Kegelschnitt auf einem zur Ebene der Reciprocität normalen Cylinder. Jede Gruppe der ersteren Regelflächen führt zu unendlich vielen Reciprocitäten* (c B^2 a $\varDelta$). *Jede Gruppe der in zweiter Linie erwähnten Regelflächen führt nur zu einer Reciprocität.* C^4 *correspondirt in diesen zweifach unendlich vielen Reciprocitäten den Strahlen eines Büschels mit dem Scheitel* P.

3.

Wir wenden uns dazu, die gegenseitige Abhängigkeit der Bestimmungsstücke unserer Reciprocitäten zu untersuchen. Zunächst ergibt sich aus der Herleitung der *Kegelschnitte* B^2, *dass jeder derselben vier Punkte von* C^4 *enthält, welche paarweise auf Geraden durch* B liegen.

Unter 1 haben wir gesehen, dass die Tangenten — t_1 t_2 — aus P an C^4 den dort benutzten Kegelschnitt B^2 berührten. Lassen wir jetzt an seine Stelle irgend einen der Kegelschnitte B^2 treten, welche wir oben ab-

leiteten, so erhalten wir aus ihm durch Vermittlung einer Reciprocität ($c\,B^2\,a\,\varDelta$) dieselbe Curve vierter Ordnung wie unter 1. Sie hat also die nämlichen Tangenten aus P und daraus folgt, *dass sämmtliche Kegelschnitte* B^2 *von den Geraden* $t_1\,t_2$ *berührt werden.*

Seien $B_1\,B_2$ zwei Punkte eines Kegelschnittes B^2, welche auf einer Geraden x durch B liegen. Dann befinden sich in den Geraden $PB_1\,PB_2$ zwei Punkte — P_1P_2 — von C^4, welche auf einer Geraden x_1 durch B gelegen sind (1). Sollen wir die nämlichen Punkte $P_1\,P_2$ unter Benutzung eines anderen Kegelschnittes — sagen wir B^{2x} — erhalten, so muss $\overline{PB_1}$, $\overline{PB_2}$ aus B^{2x} zwei Punkte — $B_{1x}\,B_{2x}$ — schneiden, deren Verbindungslinie durch B geht. Lassen wir an Stelle von x eine der Tangenten an B^2 treten, so folgt: *Die Berührungspunkte der Tangenten aus B an die Kegelschnitte* B^2 *liegen auf zwei Geraden durch* P.

Zur Construction der Tangente b in B an C^4 haben wir unter 1 die Relation $(c\,p\,a\,b) = \varDelta$ abgeleitet. Dieselbe Linie b müssen wir erhalten, wenn wir C^4 mit Hülfe irgend einer der Reciprocitäten ($c\,B^2\,a\,\varDelta$) zeichnen. Es werden daher für alle Reciprocitäten, welche das nämliche Doppelverhältniss $\varDelta$ haben, die Geraden a und c in der erwähnten Abhängigkeit von p und b stehen. Wir schliessen daraus:

Die Geraden a und c der Reciprocitäten von gleichem Doppelverhältniss $\varDelta$ bilden eine Projectivität, für welche b und p die Doppelstrahlen sind.

Sei die Curve C^4 gegeben und betrachten wir irgend zwei Gerade durch B als a und c einer Reciprocität, so wird ihr Doppelverhältniss durch die Bedingung $(c\,p\,a\,b) = \varDelta$ bestimmt. Zu C^4, a, c, $\varDelta$ gehört ein Kegelschnitt B^2. Der-

selbe geht durch die Schnittpunkte von a und c mit C^4 und hat $t_1 t_2$ zu Tangenten. Nun waren a und c beliebig gewählte Gerade durch B. Es folgt also:

Durch vier Punkte von C^4, *welche auf zwei Geraden aus* B *liegen, geht ein Kegelschnitt* B^2 oder: *Construiren wir auf den Geraden durch* P *zu den Schnittpunkten —* $P_c\, P_a\, P_1$ *— mit* c, a, C^4 *diejenigen Punkte* B, *für welche* $(P_c B P_a P_1) = \varDelta$ *ist, so liegen diese auf einem Kegelschnitt.*

Seien $h_1 h_2$ zwei Gerade durch P, welche B^2 in den resp. Punkten $B_{h_1}\, B_{h_2}$ treffen. Auf den Geraden durch diese Punkte und P sollen die Punkte $P_{h_1}\, P_{h_2}$ von C^4 liegen, für welche $(P_{c_1}\, B_{h_1}\, P_{a_1}\, P_{h_1}) = \varDelta = (P_{c_2}\, B_{h_2}\, P_{a_2}\, P_{h_2})$. Dabei seien $P_{c_1} \ldots P_{a_1} \ldots$ die Schnittpunkte von $h_1 h_2$ mit a und c. Wir wollen $B_{h_1} P_{h_1}$, $B_{h_2} P_{h_2}$ zugeordnete Punkte von B^2 und C^4 nennen. Dann folgt aus der angeführten Relation, dass die Punkte $P_{c_1}\, P_{c_2}$, $B_{h_1}\, B_{h_2} \ldots$ projective Reihen auf $h_1 h_2$ bilden. Also sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser Reihen — d. h. c, $\overline{B_{h_1}\, B_{h_2}}$, $a\, \overline{P_{h_1}\, P_{h_2}}$ Tangenten eines Kegelschnittes, der von $h_1\, h_2$ berührt wird. Bezeichnen wir die Geraden $\overline{B_{h_1}\, B_{h_2}}$ und $\overline{P_{h_1}\, P_{h_2}}$ als Sehnen von B^2 und C^4, welche in der Reciprocität $(c\, B_2\, a\, \varDelta)$ einander zugeordnet sind, so können wir das jetzt Bewiesene dahin aussprechen:

Zwei Sehnen des Kegelschnittes B^2 *und der Curve* C^4, *welche in der Reciprocität* $(c\, B^2\, a\, \varDelta)$ *einander zugeordnet sind, umhüllen mit den Geraden durch* P, *welche die zugeordneten Punkte dieser Sehnen verbinden und mit* a *und* c *einen Kegelschnitt.*

Kennen wir P, B, B^2 und ein Punktepaar $B_{h_1}\, P_{h_1}$, so können wir nach diesem Satze auf lineare Weise die Punkte construiren, welche auf einer Geraden — x — durch B liegen. Treffe x den Kegelschnitt B^2 in B_h^2, so

zeichnen wir durch P_{h_1} die Tangente eines Kegelschnittes, welche von a, c, $\overline{B_{h_1} B_{h_2}}$, $\overline{P B_{h_1}}$ und $\overline{P B_{h_2}}$ berührt wird. Sie schneidet x in einem Punkte von C^4.

Specialisiren wir den zuletzt hervorgehobenen Satz für die Tangenten, welche durch P an C^4 gehen, so folgt:

Die Tangenten aus P *an* C^4 *umhüllen mit den Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte an* C^4 *und an einen Kegelschnitt* B^2 *und mit a und c einen Kegelschnitt.*

Tritt an Stelle der Sehnen $\overline{B_{h_1} B_{h_2}}$ die Tangente in B_{h_1} an B^2, so geht $\overline{P_{h_1} P_{h_2}}$ in eine Tangente in P_1 an C^4 über. Aus den Geraden $h_1 h_2$ wird eine Tangente h_1, welche in P ihren Berührungspunkt hat und wir sagen:

Sind B_{h_1} P_{h_2} *zugeordnete Punkte in der Reciprocität* ($c\,B^2\,a\,\varDelta$), *so umhüllen die resp. Tangenten in ihnen an* B^2 *und* C^4 *mit a und c einen Kegelschnitt, der in* P *von* h_1 *berührt wird.*

Mit Hülfe dieses Satzes können wir auf lineare Weise die Tangente in P_{h_1} an C^4 zeichnen. Er versagt, wenn im Punkte C_1 auf a die Tangente gezeichnet werden soll. Dann construiren wir die Tangentialebene an R_4 in C_1. (Fig. 3.) Zu diesem Zwecke ziehen wir die Transversale t durch C_1 zu n_p und c_2. Weiter zeichnen wir die Tangente — t_b — in C_1 an B^2. Durch letztere legen wir zur Ebene der Reciprocität eine Normalebene. Sie trifft die Ebene durch c_1 und a in einer Geraden — s — welche in C_1 den Kegelschnitt S^2 berührt, den die Ebene durch c_1 und a aus R^4 schneidet. Mithin muss die Ebene durch die Geraden t und s die Fläche R^4 in C_1 berühren und aus der Ebene der Reciprocität eine Gerade — t_c — schneiden, welche in C_1 Tangente an C^4 ist. Bezeichnen wir die Orthogonalprojection von t auf die Ebene der Reciprocität — also die Gerade $\overline{P C_1}$ — mit p_c, so können

wir die skizzirte Construction von t_c durch die Relation $(p_c\, t_b\, a\, t_c) = \varDelta$ ausdrücken. In analoger Weise erhalten wir die Tangenten in C_2. Handelt es sich darum, die Tangenten in $A_1\, A_2$ — den Schnittpunkten von c mit C^4 — zu finden, so betrachten wir letztere Gerade als Linie a einer Reciprocität $(c B^2\, a\, \varDelta^*)$, bestimmen dem entsprechend $\varDelta^*$ und construiren dann die Tangenten in analoger Weise, wie dies jetzt bei den Punkten $C_1\, C_2$ geschehen ist.

4.

Wir heben unter den Reciprocitäten $(C B^2\, a\, \varDelta)$ diejenigen hervor, für welche $\varDelta = 2$ ist. Bei ihnen bilden b, p mit den Geraden $a\, c$ harmonische Gruppen.

Sei B^2_2 ein Kegelschnitt einer solchen Reciprocität, so erhalten wir (vgl. 1) die Tangenten — $p_1\, p_2$ — in P an C^4, indem wir eine Gerade b_1 nach der Bedingung $(c\, b_1\, a\, p) = 2$ zeichnen. Letztere sagt aber aus, dass p und b_1 mit a und c eine harmonische Gruppe bildet. Also muss b_1 mit der oben erwähnten Geraden b zusammenfallen. Verbinden wir die Punkte, in denen b den Kegelschnitt B^2_2 schneidet, mit P, so erhalten wir $p_1\, p_2$. Nun müssen wir stets zu denselben Tangenten $b, p_1\, p_2$ gelangen, welchen Kegelschnitt B^2 wir auch benutzen. Wir schliessen also:

Sämmtliche Kegelschnitte B^2 *der Reciprocitäten, für welche* $\varDelta = 2$ *ist, gehen durch die Schnittpunkte von* b *mit* $p_1\, p_2$.

Specialisiren wir das, was am Ende von 1 gesagt wurde, für $\varDelta = 2$, so geht die Projectivität P_{ac} in Involution über und wir sagen:

Verbinden wir die Punkte, in denen ein Strahl einer Involution einen Kegelschnitt B^2 *trifft, mit einem beliebigen*

Punkte P, *so schneiden diese Verbindungslinien den entsprechenden Strahl in zwei Punkten einer* C^4.

Sei E_1 ein gemeinsamer Punkt von C^4 und B_2^2, welcher nicht in a oder c liegt, so schneidet die Gerade $\overline{PE_1}$ — sagen wir e — aus B_2^2 einen zweiten Punkt E_2 und aus a und c die resp. Punkte P_a, P_c. Dann muss in der Reciprocität $(c B^2 a 2)$ dem Punkte E_2 von B_2^2 der Punkt E_1 von C^4 zugeordnet sein, d. h. $(P_c E_2 P_a E_1) = 2$. Aus dieser Relation folgt aber, dass auch $(P_c E_1 P_a E_2) = 2$ ist. Mithin muss E_2 ein Punkt von C^4 sein, welcher dem Punkte E_1 von B_2^2 zugeordnet ist, d. h. E_2 ist ebenfalls ein gemeinsamer Punkt von B_2^2 und C^4. Analoge Schlüsse zeigen uns, dass zwei weitere gemeinsame Punkte von B_2^2 und C^4 auf einer Geraden — f — durch P liegen. Wir folgern also:

Die Kegelschnitte B_2^2, *welche zu den Reciprocitäten gehören, deren* Δ *gleich 2 ist, haben ausser den Punkten in a und c mit* C^4 *noch vier Punkte gemeinsam, welche paarweise auf Geraden durch* P *liegen.*

Seien $F_1 F_2$ die gemeinsamen Punkte von C^4 und B_2^2, welche in f gelegen sind, so folgt aus dem unter 3 Bewiesenen, dass $e f a c$ mit den Geraden $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ einen Kegelschnitt umhüllen. Ein zweiter Kegelschnitt hat $e f a c$ und $E_1 F_2$, $E_2 F_1$ zu Tangenten.

Für die Construction der Tangenten an C^4 in den Schnittpunkten von a und c mit B_2^2 folgt (3):

In den auf a und c liegenden Schnittpunkten von C^4 *mit* B_2^2 *bilden die Tangenten an* C^4 *und* B_2^2 *mit den Geraden nach* B *und* P *harmonische Gruppen.*

5.

Sei g eine beliebige Gerade der Ebene, so fragen wir nach den Schnittpunkten von g mit C^4.

Um diese zu finden, ziehen wir durch B eine Gerade c_2, welche nicht in der Ebene der Reciprocität liegt. Dann denken wir uns eine Regelfläche — R^4 — construirt, welche zu dieser Geraden c_2 gehört, d. h. wir fixiren eine Reciprocität ($c\,B^2\,a\,\varDelta$), in welcher C^4 den Strahlen eines Büschels mit dem Scheitel P correspondirt. Weiter zeichnen wir ein Hyperboloid H^2, welches durch die Geraden g, c_2 und n_p bestimmt wird. Nun schneidet die Ebene, welche durch a und die Doppellinie d von R^4 geht, aus letzterer Fläche einen Kegelschnitt S^2 und aus dem Hyperboloid H^2 einen Kegelschnitt H^2. Durch die gemeinsamen Punkte von S^2 und H^2 gehen vier Transversalen zu c_2, n_p und g, welche auf R^4 und H^2 liegen. Diese schneiden g in vier Punkten von C^4. Zur Durchführung dieser Construction bestimmen wir die Orthogonalprojectionen von S^2 und H^2 auf die Ebene der Reciprocität. Die Projection von S^2 ist der Kegelschnitt B^2 der Reciprocität ($c\,B^2\,a\,\varDelta$). Die Projection — H^2_g — von H^2 erhalten wir durch folgende Ueberlegung: Sei t eine Transversale zu $c_2\,n_p$ und g und schneide diese aus der Ebene $\widehat{ad}$ den Punkt D von H^2, so erzielen wir durch D zur Ebene der Reciprocität eine Normale. Ihr Fusspunkt — D_1 — liegt auf H^2_g. Die Orthogonalprojection — t_1 — von t geht durch D_1 und wenn ihre resp. Schnittpunkte mit g, a, c durch $P_g\,P_a\,P_c$ bezeichnet werden, so können wir die dargelegte Construction von D_1 durch die Relation ausdrücken: $(P_c\;D_1\;P_a\;P_g) = \varDelta$ oder $(P_a\;P_g\;P_c\;D_1) = \varDelta$. Da diese Relation für alle Punkte von H^2_g gilt, welche auf Geraden durch P liegen, können wir schliessen, dass H^2_g der Kegelschnitt ist, welcher den Strahlen des Büschels durch P in der Reciprocität ($a\;g\;c\;\varDelta$) correspondirt. Daraus

folgt, dass Hg^2 durch die Schnittpunkte der Geraden agc geht.*)

Ist E ein gemeinsamer Punkt von B^2 und H_g^2, so repräsentirt er die Orthogonalprojection eines gemeinsamen Punktes von S^2 und H^2. Also ist die Gerade $\overline{EP}$ die Orthogonalprojection einer gemeinsamen Transversalen von R^4 und H^2 und trifft mithin g in einem Punkte von C^4.

Nimmt g alle möglichen Lagen in der Ebene der Reciprocität an, so gehört zu jedem g ein Kegelschnitt Hg^2 resp. ein Hyperboloid H^2. Auf allen diesen Hyperboloiden liegt n_p und c_2. Mithin gehen alle Kegelschnitte H_g^2 durch P und B. Eine weitere Gerade, welche allen Hyperboloiden H^2 angehört, ist die Verbindungslinie BP oder p. Also werden diese Hyperboloide von der Ebene durch c_2 und p in B berührt. Diese schneidet die Ebene $\hat{a d}$ in einer Geraden, welche in B sämmtliche Kegelschnitte H^2 tangirt. Ihre Orthogonalprojection — b — muss somit alle Kegelschnitte H_g^2 in B berühren. Nach der gegebenen Construction wird sie durch die Bedingung $(c\,b\,a\,p) = \varDelta$ bestimmt, d. h. sie ist die Tangente in B an C^4.

Wir sehen aus dem Gesagten, dass die Kegelschnitte H_g^2 ein specielles Netz von der Art bilden, dass alle durch P gehen und sich in B berühren. Sie stehen mit den Geraden der Ebene in der Beziehung einer quadratischen Transformation. Jeder Kegelschnitt H_g^2 trifft a und c — ausser in B — noch je in einem Punkte. Die Verbindungslinie dieser Punkte ist die zu H_g^2 zugeordnete Gerade g.

Der Kegelschnitt H_g^2, welcher a und c zu Asym-

---

*) Vgl. Ueber eine ebene Reciprocität Nr. 7.

ptotenrichtungen hat, correspondirt der unendlich fernen Geraden der Ebene. Bestimmen wir seine Schnittpunkte mit B^2, so liegen auf den Geraden aus P nach diesen Schnittpunkten die unendlich fernen Punkte von C^4.

Berührt H_g^2 den Kegelschnitt B^2, so ist die zugeordnete Gerade g eine Tangente an C^4.

Es erscheint somit C^4 *als Enveloppe aller der Sehnen, welche die Geraden* a *und* c *aus den Kegelschnitten* H_g^2 *schneiden, die* B^2 *berühren.*

Verbinden wir im letzteren Falle den Berührungspunkt von B^2 und H_g^2 mit P, so schneidet diese Verbindungslinie aus g den Berührungspunkt dieser Geraden mit C^4.

Haben wir speciell C^4 aus einem Kegelschnitt B_2^2 abgeleitet und sei B_1 P_1 ein zugeordnetes Punktepaar von B^2 und C^4, so wird dasselbe durch a und c harmonisch getrennt. Mithin bilden a und c mit den Geraden $B B_1$ und $P P_1$ eine harmonische Gruppe. Ist dann b_1 die Tangente in B_1 an B^2, so construiren wir einen Kegelschnitt H_g^2, der von b in B und von b_1 in B_1 berührt wird und durch P geht. Er schneidet a und c in zwei Punkten, deren Verbindungslinie die Tangente p_1 in P_1 an C^4 ist. Diese Punkte — A, C — bilden mit P_1 und dem Schnittpunkte — S — von p_1 und $B B_1$ eine harmonische Gruppe. Daraus folgt, dass die Polare von S in Bezug auf H_g^2 durch P_1 geht. Zeichnen wir jetzt einen Kegelschnitt — H_t^2 — der H_g^2 in B und B_1 berührt, so hat der Punkt S in Bezug auf H_t^2 dieselbe Polare wie in Bezug auf H_g^2. Setzen wir fest, dass H_t^2 durch P_1 gehen soll, so folgt aus dem Gesagten, dass p_1 die Tangente in P_1 an H_t^2 ist.

Wir schliessen daher:

Sind $B_1 P_1$ *zwei in einer Reciprocität* $(c B^2_2 a 2)$ *zugeordnete Punktepaare von* B^2 *und* C^4, *so berührt der Kegelschnitt durch* $b B$, $b_1 B_1$ *und* P_1 *die Curve* C^4 *in* P_1.

6.

Die Kegelschnitte H^2_g, welche in der erwähnten quadratischen Transformation den Geraden durch einen Punkt — sagen wir T — correspondiren. schneiden sich in einem Punkte T_1, d. h. sie bilden ein Büschel. Trifft nämlich $\overline{PT}$ die Geraden a und c in den Punkten $P_a P_c$, so wird T_1 durch die Relation: $(P_a T P_c T_1) = \Delta$ bestimmt. Handelt es sich darum, die Tangenten zu finden, welche aus T an C^4 gezogen werden können, so haben wir diejenigen Kegelschnitte H^2_g durch T_1 zu zeichnen, welche den Kegelschnitt B^2 berühren. Ihre Zahl ist sechs. Dem entsprechend gibt es sechs Tangenten durch T an C^4, d. h. *letztere Curve ist von der sechsten Classe.*

Soll g eine Doppeltangente an C^4 sein, so muss der Kegelschnitt H^2_g, welcher zu g gehört, den Kegelschnitt B^2 doppelt berühren. Unter den Kegelschnitten eines Netzes gibt es im Allgemeinen vier, welche einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren. *Also hat* C^4 *vier Doppeltangenten.*

Von diesen fallen zwei in b zusammen. Die anderen zwei erhalten wir, indem wir die zwei Kegelschnitte H^2_g construiren, welche b in B tangiren, durch P gehen und B^2 doppelt berühren. Diese Construction — eine Specialisirung der allgemeinen Construction, welche die Kegelschnitte eines Netzes finden lehrt, die einen Kegelschnitt doppelt berühren — lässt sich in folgender Weise durchführen: Wir betrachten die Punkte B und P auf p als Doppelpunkte einer Punkteinvolution. Dann bestimmen

wir die Involution harmonischer Pole in p in Bezug auf B^2. Beide Involutionen haben ein gemeinsames Paar — G H. Nun zeichnen wir in b die Involution harmonischer Pole — J_b — in Bezug auf B^2. Den Punkt B betrachten wir als zusammenfallendes Paar von Doppelpunkten einer parabolischen Involution auf b. Dann haben die beiden letzterwähnten Involutionen in B und dem entsprechenden — B_1 — zu B in der Involution J_b ein gemeinsames Paar. Ziehen wir jetzt B_1 g, B_1 H, so sind diese Geraden die gemeinsamen Sehnen zwischen B^2 und den zwei gesuchten Kegelschnitten H_g^2. Letztere schneiden a und c in Punkten, deren resp. Verbindungslinien die Doppeltangenten — $d_1 d_2$ — von C^4 sind. Ihre Berührungspunkte liegen auf Geraden, welche wir aus P nach den resp. Berührungspunkten der zwei Kegelschnitte H_g^2 mit B^2 ziehen können.

$d_1 d_2$ sind stets reell, weil die Geraden a und c jeden Kegelschnitt H_g^2 in B reell schneiden und folglich ein zweites Mal reell schneiden müssen. Dagegen können die Berührungspunkte dieser Doppeltangenten imaginär werden. Dies wird für den Fall, dass B_1 G, B_1 H reell sind, stets dann eintreten, wenn eine dieser Geraden oder beide den Kegelschnitt B^2 imaginär schneiden. Projiciren wir diese Schnittpunkte aus P auf die resp. Doppeltangenten, so erhalten wir in denselben conjugirt imaginäre Berührungspunkte. Sind aber B_1 G, B_1 H imaginäre Gerade mit dem reellen Scheitel B, so schneiden sie B^2 in nicht conjugirten imaginären Punkten, deren Projectionen aus P auf die Doppeltangenten ihre Berührungspunkte sind.

7.

Wir wenden uns zu den Fällen, in welchen unsere betrachtete Curve vierter Ordnung einen speciellen Charakter hat.

a) Wir nehmen an, *dass a die unendlich ferne Gerade der Ebene sei.* Construiren wir dann eine Curve C^4 aus einem Kegelschnitt B^2 mit Hülfe einer Reciprocität, deren $\Delta = 2$ ist, so muss auf einer Geraden durch P die Bedingung $(P_c P_b P_a P_1) = \Delta$ erfüllt werden. Liegt nun P_a unendlich ferne, so halbirt P_c die Strecke $P_b P_1$. Wir können dann die Erzeugung von C^4 dahin fassen:

Gegeben sei ein Kegelschnitt B^2, *eine Gerade c und ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel* P. *Tragen wir den Abstand der Punkte, in welchen die Strahlen dieses Büschels die Gerade c und den Kegelschnitt* B^2 *schneiden, von den Punkten in c aus je auf die entgegengesetzte Seite ab, so erhalten wir eine* C^4 *(Fig. 12).*

Diese hat im unendlich fernen Punkte von *c* einen doppelten Berührungsknoten. Seine Tangente — *b* — ist parallel *c* und liegt in der Mitte von P und *c*. P ist ein Doppelpunkt von C^4. Seine Tangenten gehen durch die Schnittpunkte von *b* mit B^2.

Wir haben oben gesehen, dass es unendlich viele Kegelschnitte B^2 gibt, aus denen C^4 in einer Reciprocität $(c B^2 a\, 2)$ abgeleitet werden kann. Indem wir diese Bemerkung in unserem speciellen Falle berücksichtigen und mit *p* die Gerade bezeichnen, welche durch P geht und zu *c* parallel ist, sagen wir: *Sei* c_1 *und* a_1 *ein Geradenpaar, das mit b und p eine harmonische Gruppe bildet und construiren wir auf Geraden durch* P *zu den Punkten von* C^4 *— ausgenommen* P *— die vierten harmonischen in Bezug auf die Schnittpunkte mit* a_1 *und* c_1, *so liegen diese vierten harmonischen auf einem Kegelschnitt* B_1^2.

Analoge Sätze erhalten wir, wenn wir für ein unendlich fernes *a* die Curve C^4 in den Reciprocitäten $(c B^2 a - 1)$ und $(c B^2 a\, \frac{1}{2})$ ableiten. Im ersteren Falle ist C^4 der Ort

der Mittelpunkte der Strecken, welche die Strahlen durch P aus c und B^2 schneiden. Im zweiten Falle wird C^4 erhalten, wenn wir diese Strecken von den Punkten auf B^2 aus nach der entgegengesetzten Seite hin abtragen. Ist B^2 ein Kreis, so gehen die jetzt besprochenen Curven vierter Ordnung durch die imaginären Kreispunkte.

b) C^4 sei aus einem Kegelschnitt B^2 in einer Reciprocität $(c B^2 a 2)$ abgeleitet. Ist wieder — wie oben — b die Tangente in B an C^4, so kann b den Kegelschnitt B^2 berühren. Dann fallen in der Geraden, welche den Berührungspunkt mit P verbindet, die zwei Tangenten in P an C^4 zusammen. P ist also eine Spitze von C^4. *Diese Curve hat mithin einen doppelten Berührungsknoten und eine Spitze.*

Specialisiren wir für diesen Fall die gegebene Construction der Doppeltangenten an C^4, so ergibt sich, dass die hierbei auftretenden Kegelschnitte H_g^2 degeneriren. Ein Theil derselben ist b; der andere besteht je aus einer der Tangenten, welche von P aus an B^2 gelegt werden können. Letztere Tangenten sind also als zwei Doppeltangenten von C^4 zu betrachten.

Liegt P auf einer Tangente, welche in einem Schnittpunkte von b mit B^2 letzteren Kegelschnitt berührt, so hat diese Tangente in P mit C^4 vier benachbarte Punkte gemein. Sie ist also eine Inflexionstangente in P an C^4.

Ist P der Pol von b in Bezug auf B^2, so sind die Geraden, welche P mit den Schnittpunkten von b und B^2 verbinden, Tangenten aus P an B^2. Jede derselben hat folglich in P mit C^4 vier benachbarte Punkte gemein d. h. sie ist Inflexionstangente in P an C^4. *Diese Curve hat mithin einen doppelten Berührungsknoten und einen doppelten Inflexionsknoten.*

P und b ist in diesem Falle Pol und Polare für alle Kegelschnitte, aus denen sich C^4 mit Hülfe einer Reciprocität ($c\,B^2\,a\,2$) ableiten lässt. Da diese Kegelschnitte sich überdies in zwei Punkten von b schneiden, so folgt, dass sie alle in diesen Punkten von den in Rede stehenden Inflexionstangenten berührt werden. Letztere sind reell, wenn P in dem Theile der Kegelschnitte B^2 liegt, für welchen alle Involutionen harmonischer Polaren hyperbolisch sind. Dann schneiden sich in P zwei reelle Aeste von C^4. Liegt aber P im anderen Theile der Kegelschnitte B^2, so ist P ein isolirter Punkt von C^4.

Nehmen wir an, dass in dem zuletzt besprochenen Fall b die unendlich ferne Gerade sei, so sind a und c zu einander parallel und P liegt in der Mitte zwischen diesen Geraden. Daraus ergibt sich folgender Satz:

Gegeben sei ein Kegelschnitt — B^2 — *und ein Paar von parallelen Geraden* — a, c — *welche von einem Punkte* P *gleichweit abstehen. Construiren wir auf den Geraden durch* P *zu den Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt die vierten harmonischen in Bezug auf die Schnittpunkte mit* a *und* c, *so ist der Ort dieser vierten harmonischen eine* C^4 *(Fig. 13).*

Diese hat den unendlich fernen Punkt der Geraden a zum doppelten Berührungknoten.

Ist P der Mittelpunkt des Kegelschnittes B^2, so ist er der Pol von b und also für C^4 ein doppelter Inflexionsknoten. Seine Tangenten sind die Asymptoten von B^2.

Alle Kegelschnitte B^2, aus denen die letzte C^4 in einer Reciprocität ($c\,B^2\,a\,2$) abgeleitet werden kann, haben dieselben Asymptoten, d. h. sie sind zu einander ähnlich. Wir schliessen daraus: *Seien* $a_1\,c_1$ *zwei Gerade, welche zu* a *parallel sind und von* P *gleichweit abstehen, und con-*

struiren wir auf den Geraden durch P *zu den Punkten von* C^4 — *ausgenommen* P, B — *in Bezug auf die Schnittpunkte mit* a_1 *und* c_1 *die vierten harmonischen, so liegen diese auf einem Kegelschnitt, der zum Kegelschnitt* B^2 *ähnlich ist.*

8.

Wir betrachten nun die degenerirten Formen unserer Curve vierter Ordnung.

a) Der Punkt P *liege auf einem Kegelschnitt einer Reciprocität* ($c\,B^2\,a\,\varDelta$).

Construiren wir in derselben zu den Strahlen durch P die entsprechenden Punkte, so liegt auf jeder Geraden durch P ein Punkt P_1, für welchen die Relation

$$(P_c\,P\,P_a\,P_1) = \varDelta$$

gilt. Also sind alle diese Punkte P_1 auf einer Geraden b gelegen, welche durch die Bedingung $(c\;p\;a\;b) = \varDelta$ bestimmt wird. Mithin werden die übrigen Punkte, welche in der Reciprocität ($c\,B^2\,a\,\varDelta$) den Geraden durch P entsprechen, auf einer Curve dritter Ordnung — C^3 — liegen. Zur näheren Untersuchung dieser Curve gehen wir auf die Regelfläche vierter Ordnung — R^4 — zurück, welche in der Reciprocität ($c\,B^2\,a\,\varDelta$) zur Curve C^4 gehört. Die Leitcurven von R^4 waren c_2, n_p und der in der Ebene $\hat{a\,c_1}$ liegende Kegelschnitt S^2. Liegt P auf B^2, so muss n_p den Kegelschnitt S^2 schneiden. Also besteht ein Theil von R^4 aus der Ebene, welche durch c_2 und den Schnittpunkt — D — von n_p mit S^2 geht. Der Rest dieser Fläche ist mithin eine Regelfläche dritter Ordnung — R^3. Diese wird von der Ebene der Reciprocität in C^3 geschnitten. n_p ist eine doppelte Gerade von R^3. Also ist P ein Doppelpunkt von C^3. Wir erhalten seine Tangenten,

l'ouvrage qu'il a laissé à ses successeurs est immense. ***Il nous a donné le marbre, sans nous enseigner le moyen d'en tirer la statue.*** *Sans Clairaut, sans Euler, sans d'Alembert, je ne sais à quel point serait cette question.*

Adr. Scherer: St. Gall 1829 III 15. — J'ai reçu dans le tems, Mon cher Monsieur, votre bonne lettre du 16 Janvier et vous en remercie bien sincèrement; j'espère qu'il n'est maintenant plus question de votre mal d'yeux, et que vos travaux astronomiques reprennent peu à peu leur cours ordinaire. Quand à moi, qui ai été encore tout l'hyver dans les remèdes, on me conseille de voyager cet été pour consolider ma santé, et j'ai inventé de partir dès le milieu du mois prochain avec ma femme pour la Hollande, d'aller passer de là deux mois en Angleterre et de terminer le tout par un séjour de deux à trois mois à Paris. Si la saison n'est pas trop avancée nous pourrions bien prendre notre retour en Suisse par Genève, ce qui me procurerait alors le très grand plaisir de vous revoir. — Vous comprenez bien, Mon cher Monsieur, qu'en m'adressant à vous et vous parlant de l'Angleterre, mes vues sont intéressées; je scais que vous avez vû *et bien vû* ce pays — là, que vous n'y avez point négligé la partie scientifique, et c'est sous ce dernier rapport que je désirerais vos renseignements. Nous n'irions point en Ecosse, notre temps étant trop limité pour cela, mais nous en tiendrons à Londres et à l'Angleterre proprement dite, si donc vous vouliez prendre la peine de me faire une petite liste des choses et des lieux qui ont le plus fixé votre attention dans Londres et environs, et pour combler la mesure de mes obligations y joindre un petit billet d'introduction et de présentation pour celui des Astronomes de Londres que vous connaissez le mieux (si bien entendu il parle français). Vous me rendrez par là le grand service de voir agréablement et à mon aise les deux observatoires si illustres de Greenwich et de Slough, ce qui ne serait point le cas si je m'y présente comme un badaud avec un domestique de place. Je vous demanderai bien aussi dans le tems un petit mot de votre main pour Mr. Nicollet, car depuis que j'ai perdu à Paris mon bon ami Burckardt je n'aurais plus personne pour pouvoir être introduit aux séances de l'Académie des Sciences,

où j'ai eu le plaisir de vous rencontrer si souvent en 1816. — Je rends grace du fond de mon coeur à la pluie, à la neige, ainsi qu'à tous les Elémens dévastateurs, d'avoir minés, rongés et lézardés votre Observatoire de telle manière qu'il faille l'abandonner; ils ont rendu par là un grand service à la Science et vous ouvrent une Ere nouvelle et préparent bien des jouissances. L'observatoire de Genève était une construction surannée que Mr. le Prof. Pictet avait encore encombré par ses bâtisses. Si le Gouvernement décrète maintenant un nouvel Observatoire et accorde des fonds suffisants, bâtisez-le en petit sur les principes des deux observatoires les plus modernes de l'Allemagne et peut-être de l'Europe, savoir ceux de Göttingen et de Munic; ce dernier (le seul que je connais et que j'ai vû bâtir en 1817), quoique bâti uniquement en briques, présente la plus grande solidité et tous les raffinements qu'un Reichenbach et un Soldner on pû inventer pour obtenir la plus parfaite pose des instruments modernes. C'est un chef d'oeuvre et l'on peut croire que celui de Göttingen bâti la même année sous la direction d'un Gauss ne lui cède en rien. Il existe une description (imprimée à Munich) de l'Observatoire de Bogenhausen que vous devriez vous procurer, et je ne scaurais en général trop vous conseiller de vous laisser tout le tems d'étudier les constructions les plus modernes avant de présenter un plan. Vous vous devez cela ainsi qu'à vos successeurs. Je ne scais pourquoi on entend si peu parler de cet Observatoire de Munich, un des mieux montés de l'Europe; il faut nécessairement que Soldner soit un paresseux, ou qu'il garde ses observations pour lui tout seul.

Fr. Trechsel: Bern 1829 III 22. Ich habe die Zeit her wenig oder nichts in Astronomie gethan, theils weil meine übrigen und Haupt-Beschäftigungen fast alle meine Zeit in Anspruch nehmen, theils auch, weil mir Fritz als Gehülfe fehlt. Dieser ist nun seit bald zwei Jahren abwesend, — erst mit mir in Paris, dann ½ Jahr in Göttingen, ½ Jahr in Halle, seit letztem Herbst in Berlin, wo er noch bis künftigen Herbst zu bleiben gedenkt. Ich habe fortdauernd sehr gute Nachrichten von ihm. Sein Hauptstudium ist Theologie im weitern Sinne, wozu wir freilich auch die Offenbarung Gottes in der Natur,

mithin die Naturwissenschaften (sein Lieblingsstudium) zählen. Er erinnert sich fortwährend, und wie billig mit grosser Anhänglichkeit und Dankbarkeit an Genf, und es wird ihm grosse Freude machen, wenn ich ihm schreibe, dass Sie sich auch noch gütig seiner erinnern. — Sie werden mit nächstem von hier aus einige Gedanken über den an der letzten naturforschenden Versammlung in Lausanne gemachten Vorschlag in Betreff einer für Wissenschaft und Vaterlandskunde gar sehr zu wünschenden allg. Charte der Schweitz zugeschickt erhalten, über welche wir sehr gerne Ihre und auch des Herrn Oberst Dufour Bemerkungen vernehmen würden. Der Vorschlag geht dahin allenfalls von Gesellschaft aus die fernere Leitung und Fortsetzung der eidgenössischen Vermessungen zu übernehmen. Die Sache hat freilich grosse, und ich fürchte, fast unüberwindliche Schwierigkeiten. — Unser würdige Veteran der Astronomie, Baron von *Zach*, ist wieder in Paris bei Civiale, wo ich ihn bei meinem Aufenhalte vor $1\frac{1}{2}$ Jahren besuchte. Civiale behandelt ihn an seinem hartnäckigen Uebel, einem Blasen-Catharr, nach einer neuen Methode, die wiederum viel Aufsehen machte, durch Einspritzungen von eiskaltem Wasser. In der Schweiz und in Frankfurt hat er den letzten Sommer und Herbst traurig und unruhig zugebracht. Bei seinem hiesigen Aufenthalte (er war grossentheils im Bette) sah ich ihn öfters. Einen schönen herrlichen Abend, wo es ihm sehr wohl war, hat er mit mir auf meinem kleinen Observatorium zugebracht. Er hat noch einige Sterne am Mittags-Fernrohr beobachtet, und dann, wie er sagte, dem Sternenhimmel wohl vielleicht auf immer Lebewohl gesagt.

Ad. Quetelet: Bruxelles 1829 III 29. — Je pense que je partirai dans deux mois pour faire une tournée en Allemagne où je serai envoyé par notre gouvernement. Je n'ai pas encore de plan arrêté parce que Mr. Bouvard m'a témoigné le désir d'aller également à Berlin, et je me trouverais fort heureux d'avoir un pareil compagnon de voyage. Mes projets sont donc subordonnés aux siens. J'aurais néanmoins le désir de voir Göttingen, Gotha, Weimar, Dresde, Leipzig, Berlin, Prague, Munich, Heidelberg; peut-être visiterai-je l'Italie, et alors Genève ne serait certes pas oubliée. D'une manière ou

d'autre je verrai toujours l'Italie; c'est un désir que je brule de satisfaire depuis plus de quinze ans. J'avais à peine terminé mes études, que mes voeux se portaient vers Rome et Naples; cependant beaucoup de circonstances les ont tempérés depuis. — Notre observatoire sera décidément achevé dans le courant de cette année. Le Roi vient de faire une nouvelle avance de 40000 florins, de sorte que les constructions se seront élevées à 130000 francs environ, sans les instrumens. Il ne sera cependant possible de l'habiter que l'année prochaine. Mr. Bouvard m'écrit que la lunette méridienne sera terminée pour le 1er Mai prochain. — Si Mr. De la Rive n'avait pas vû les deux articles sur les caustiques qui se trouvent dans les cahiers 1 et 2 du tome 5 de la Correspondance, je vous prierais de les lui indiquer, car c'est une partie dont il s'est occupé avec beaucoup de succès, et il ne sera peut-être pas faché de voir ce qui concerne ses recherches.

F. J. Delcros: Paris 1829 V 9. — Votre pays est isolé du repère général (la mer). Pour arriver à la détermination absolue de vos bases, il faut que vous passiez par nous. Je n'ignore pas que nos nivellements géodésiques arrivent jusqu'à votre lac. Mais il faut un peu se méfier de ces déterminations. Quelque jour nous pourrons librement nous entretenir des doutes qu'une longue expérience m'a fournis. Tâchons de nous affranchir de ces déterminations prétendues géométriques et qui sont tout aussi physiques que celles fournies par les pressions atmosphériques. J'ai appris à juger les unes et les autres, et il est bien fâcheux que l'ensemble de ce travail ne m'ait pas été confié. Mais la jalousie et l'amour propre s'y sont opposés. Quand j'aurai le plaisir de vous voir nous en causerons. Vous n'avez pas été sans vous appercevoir de quelque chose, je pense? J'ai nivellé géodésiquement depuis la mer à Marseille (phâre de Planier) jusques au Mont Pile près Lyon. Il est bien malheureux qu'on m'ait empêché de pousser ce travail jusqu'à Genève. L'opération ni aura certainement rien gagné. En attendant que je puisse saisir quelque occasion de vérifier tout cela, mettez-moi en mesure de bien fixer (barométriquement) la hauteur de votre lac. — Je trouve qu'il est inexact de déterminer la hauteur de Paris sur la Méditerranée au

moyen des pressions moyennes observées à une si énorme distance. Il y a des influences constantes qui gâtent tout. Il faudra diviser cette distance. Genève nous en offrirait le moyen. Il faudrait que vous puissiez nous fournir les moyennes des 5 dernières années, obtenues à l'aide de bons instruments bien comparés avec celui de Paris, car celui de Paris l'est bien avec celui de Marseille. J'y ai consacré tous mes soins pendant trois voyages que j'ai faites en 1824, 25 et 26. Vous sentirez toute l'importance de cette détermination triple. Marseille possède deux Baromètres de Fortin à niveau constant, et les observations y sont faites par l'infatigable Mr. Gambart, avec un soin extrême, à 9^h, midi, 3^h et 9^h. — Je vais partir pour une course géologique et un nivellement barométrique. Je serai de retour dans 15 jours. N'aurons nous pas le plaisir de vous voir à Paris.

J. Plana: Turin 1829 V 10. — Depuis que je vous ai écrit, l'impression de ma théorie de la Lune n'a pas été interompue un seul jour. Malgré cela, je vois qu'il faudra encore deux mois de travail pour achever le second Volume, qui aura près de 800 pages. J'aurais pû retrancher, et réduire ce Volume à la moitié, et même à moins. Mais mon opinion est qu'on retarde les progrès d'une science lorsqu'on supprime les détails, et qu'on pousse l'esprit d'oppression au point de donner pour clair et évident ce qui exige plusieurs pages de calculs pour en acquérir l'intime conviction. — En relisant votre lettre je vois avec plaisir que vous avez reçu dans le temps la Note additionnelle à mon Mémoire sur Jupiter et Saturne que je vous ai envoyée. J'en avais adressé aussi un Exemplaire à Mr. Poisson, mais trop tard, à ce qu'il paraît, pour l'empêcher de m'opposer ce qu'il dit dans sa Note, qui termine le Volume de la Conn. d. t. Au reste, vous saurez probablement, que depuis peu il a été reconnu qu'il suffisait de redresser une erreur de signe dans mon Mémoire pour faire cesser la controverse, et diriger les recherches vers les points qui restent à éclaircir. — Je crois, comme vous, que Mr. *Brioschi* a approfondi la question de la flexion des lunettes. Je le connais personnellement, et tout ce qui tient au mécanique des Instrumens est saisi par lui avec une rare sagacité. J'ai un cercle répétiteur

de 18 pouces de Reichenbach; la latitude qu'il donnait pour cet Observatoire s'écartait d'environ 3″ de celle donnée par le Cercle; mais la différence a disparu en introduisant dans le calcul l'erreur dûe à la flexion de la lunette. C'est aussi ce qui est arrivé à vous-même, Monsieur. Voilà pourquoi je ne puis pas adopter en entier l'opinion de Mr. Nicollet au sujet de la latitude de Mont-Jouy. Lisez, je vous prie, les pages CLXX—I du volume qui contient mon Mémoire sur les réfractions et jugez vous-même si ma remarque est probable.

Ad. Quetelet: Bruxelles 1829 VI 6. — Nous avons eu le plaisir de voir ici ces jours derniers Mr. Herschel, que vous verrez probablement aussi à Genève. Il comptait remonter le Rhin et se rendre en Suisse. Il voyage avec sa jeune épouse, qui vient sur le continent pour la première fois. J'ai été très charmé de voir Monsieur Herschel, d'abord parceque c'est un savant aussi instruit que modeste, et puis je désirai pouvoir causer avec lui de la traduction de son beau traité de la lumière, que je vais faire paraître à Paris avec Mr. le Dr. Verhulst, l'un de mes anciens disciples. — Je partirai vers la fin du mois pour Hambourg, en passant par Amsterdam. Je ferai une excursion à Bremen, puis j'irai à Berlin; je visiterai toute la Saxe, et je tâcherai d'être à la réunion de Heidelberg. Vers la fin de Septembre, si mes projets réussissent, je verrai l'Italie, et vers la fin de cet hiver conséquemment Genève. Mr. Bouvard devait être du voyage que je vais faire; mais cet excellent homme vient de m'écrire que la santé du pauvre Mr. Gambart exige ses premiers soins. Il m'écrit en même temps que l'instrument de M. Gambey est prêt; mais on travaille ici avec tant de lenteur à l'Observatoire, que le bâtiment ne sera en état de recevoir les instrumens qu'à l'été prochain. Comme notre Régence s'obstine à m'écarter des travaux, au lieu d'être spectateur très passif et quelque fois très impatient de ce qui se fait, j'ai cru que je pourrai mieux utiliser mon temps en voyageant, en examinant ce qui se fait ailleurs, et en tâchant d'établir des relations utiles. — Si Genève consent à rebâtir son observatoire, ce qui serait si désirable pour la science, sans doute on vous marquera plus de confiance que ne m'en témoigne la Régence de Bruxelles. Combien je serai heureux

de n'avoir plus à traiter par la suite qu'avec le gouvernement. — J'ai eu le plaisir de voir ici, il y a peu de temps, Mr. le Colonel Scherer, qui m'a parlé de vous avec toute l'amitié que vous portent les personnes qui ont le bonheur de vous connaître. J'ai regretté de n'avoir à lui montrer qu'un observatoire à moitié construit.

Adr. Scherer: Londres 1829 VI 21. — Si je vous adresse ces lignes, mon cher Monsieur, de cette capitale de l'Empire brittanique, c'est pour vous remercier encore bien sincèrement de m'avoir procuré la connaissance de Mr. *South* qui m'a fort bien reçu et chez qui je dîne aujourdhui avec quelques savans. Monsieur et Madame South m'ont demandé de vos nouvelles avec beaucoup d'intérêt, et c'est par ce premier que j'ai appris l'absence de Mr. *Herschel* fils pour lequel vous aviez également bien voulu m'envoyer une lettre d'introduction. Mr. Herschel, nouvellement marié, fait un voyage sur le continent avec sa jeune épouse, et vous l'avez peut-être vù à l'heure qu'il est. — L'agitation dans laquelle on vit pendant les premiers jours d'un établissement dans une Capitale, a été cause que je n'ai été porter votre lettre à Mr. *South* que huit jours après notre arrivée à Londres, et je m'en suis bien repenti, car la veille de ma visite la Société astronomique avait tenu sa séance de clôture, et Mr. South m'assura qu'il se serait fait un plaisir de m'y conduire. Cet aimable astronome m'a cependant déjà dédommagé de cette séance par une réunion des plus intéressantes à Greenwich, dont je dois vous rendre compte: Vous savez peut-être pour y avoir assisté vous même, que la Société Royale de Londres va faire annuellement l'inspection de l'Observatoire de Greenwich. Après avoir examiné les Instruments, elle tient une Séance dans la grande salle de l'Observatoire, et la Journée se termine par un grand Dîner dans une taverne sur les bords de la Tamise. Eh bien! c'est à cette réunion que j'ai été admis avec quelques autres étrangers. Je dois vous parler de cette réunion pour deux motifs, d'abord pour vous remercier de l'intéressante journée que votre recommandation m'a valu, et ensuite pour transmettre par votre canal à l'Académie de Genève ce qui lui a été adressé par la Société Royale dans ce repas où règnait la plus franche cordia-

lité. Vous scaurez donc qu'après un Toaste d'étiquette, et un fort aimable porté par Mr. le Président Gilbert en l'honneur des étrangers présents, Mr. South s'est levé, et après avoir déploré dans un discours très pathétique la perte immense que venait de faire la science et la Société Royale en particulier dans la personne de son illustre et digne Président, Sir Humphry *Davy*, m'a adressé en ma qualité de Suisse (pour vous être transmis) le Toaste porté à l'Académie de Genève, et qui a été accueilli avec transports. Ce toaste porté par la Société Royale avait pour but d'assurer l'Académie de Genève de sa parfaite considération et de sa profonde gratitude pour les honneurs qu'elle avait bien voulu rendre en dernier lieu à la mémoire de son digne Président décidé à Genève. — Je me suis maintenant acquitté de ma commission et je vous laisse, mon chér Monsieur, le soin du reste. Je dois seulement vous dire encore, que j'ai fait la connaissance à ce dîner de Don José Sanchoz de Cerquero, Directeur de l'Observatoire de San Fernando, homme fort intéressant, et de Mr. de Nehus, attaché à l'Observatoire d'Altona. J'étais assis à côté de Mr. *F. Baily*, et en face du Capitaine *Sabine*. Le Capitaine Ross vient de repartir pour la Baie de Baffin et le Capitaine Parry avec un transport de Déportés pour la Nouvelle Hollande. — On me fait espérer de trouver à Paris (oû je compte arriver au commencement d'Août) Mr. *Maurice*, ce que me ferait un très grand plaisir; si cependant cela ne devait pas être le cas, je vous prierais de vouloir bien mettre le comble à vos bontés, en m'expédiant à l'adresse de Mr. Alfrèd Saladin (rue neuve des Capucins Nr. 9 à Paris) un mot d'introduction auprès de Mr. *Nicollet*. Depuis que j'ai perdu mon ami *Burkhardt* je suis tout-à-fait étranger parmi les Astronomes Parisiens. — Si rien ne vient contrarier nos plans, j'espère avoir le plaisir de vous voir à Genève, mon cher Monsieur, en Octobre prochain, et je m'en fais une véritable fête; j'espère vous y trouver, ainsi que toute votre respectable famille, en bonne santé. — Dans 8 à 10 jours je quitte Londres pour faire un voyage dans les Provinces, et fin Juillet je repasserai probablement le Pas de Calais. Si je peux vous être bon à quelque chose, disposez; je suis tout à vous, et vous connaissez maintenant mon adresse à Paris.

J. Plana: Turin 1829 VII 12. — J'ai reçu, mon cher Monsieur, votre lettre du 23 Juin dernier, où vous me faites la plus agréable des invitations: celle de me rendre à l'Hospice du Grand St Bernard pour la réunion de la Société helvétique, dont je m'honore de faire partie. Certes j'y viendrais, si je n'étais pas retenu ici par des motifs légitimes. Comme Professeur de l'Université je ne puis m'absenter de Turin dans cette saison où l'on donne les Examens et les Grades. Comme Directeur des études mathématiques à l'Académie militaire je ne puis être en liberté que vers la moitié du mois d'Août prochain. Ajoutez à cela, que ma théorie de la Lune suffirait à elle-seule pour me retenir ici: car l'impression ne peut pas être continuée sans ma présence. Mais cela ne doit pas vous empêcher de venir à Turin. Je serai charmé de vous y voir. Vous pourrez voir tout à votre aise mon Observatoire, tirer parti de ce qu'il peut y avoir de bon, et éviter les fautes de construction qui me sont échappées. — Je pense que vous aurez reçu depuis peu de jours une assez longue Note, que je viens de faire imprimer. Cette Note a été cause d'une suspension dans l'ouvrage sur la théorie de la Lune. A l'imprimerie il n'y avait pas un autre ouvrier pour pouvoir faire marcher de front les deux Manuscrits. Les obstacles matériels que je rencontre dans ces entreprises sont assez grands pour me rendre par fois malheureux. Mais ces détails disparaissent et mes peines sont ignorées. Je désire que cette dernière Note rencontre votre approbation. Vous voyez que je présente mes calculs et mes formules de manière qu'on peut découvrir les erreurs qui peuvent s'être glissées, et qu'en cela j'adopte un système opposé à celui de Laplace, qui a constamment supprimé les intermédiaires.

Capt. Filhon): Nyon 1829 VII 30.* — Je ne sais en vérité, Monsieur, comment vous remercier assez de votre obligeance à m'apprendre d'aussi bonnes nouvelles que celle de ma nomination à la place de membre honoraire de votre Société

---

*) Capitän Filhon, französischer Ingenieur-Geograph, war damals mit den geodätischen Arbeiten im Dép. du Jura beschäftigt. — Vergl. Gesch. d. Vermess. 184.

de physique et d'histoire naturelle. Recevez pour toujours l'assurance de ma vive reconnaissance et veuillez la faire agréer à Monsieur Théod. de Saussure qui en a fait le premier la demande, et aux autres membres qui ont bien voulu appuyer sa proposition. C'est un grand encouragement pour mettre tous mes soins à bien terminer ce que j'ai entrepris de faire pour Genève. Mon second mémoire en tirera sûrement quelque mérite, car la gratitude est toujours bonne conseillère. Je désire bien vivement que le nouvel observatoire, qui vient d'être décidé par votre conseil souverain, soit fondé d'ici à cette automne. Si vous trouviez bon d'ordonner qu'on en rendit déjà le centre invariable, nous pourrions nous occuper d'avoir, avec mon grand théodolite, les élémens sûrs de la réduction de la tour de St Pierre à ce nouvel établissement en latitude et longitude. Rien alors ne me ferait faute à mon départ pour Paris et ce serait rendre, Monsieur, un grand service que de mettre à même de vous offrir un plus digne hommage. — Je serai Jeudi 6 août matin à Genève; je me fais une fête de vous y trouver et de m'entretenir avec vous et avec mon ancien Camarade M. le Colonel Dufour.

Ad. Quetelet: Berlin 1829 VIII 4. — J'ai parcouru successivement les principales villes de Hollande, Hambourg, Bremen, et je me trouve actuellement à Berlin. — J'ai vû l'Observatoire de Hambourg que dirige le très habile artiste *Repsold,* dont les ouvrages sont malheureusement trop peu connues et trop rares. Cet Observatoire, pour la forme, ressemble beaucoup à celui de Bruxelles et à celui que vous vous proposez de construire. Mr. *Encke* m'a dit qu'il adopterait probablement le même plan pour l'Observatoire que l'on va construire à Berlin. J'ai été très flatté de faire la connaissance de ce savant aussi modeste qu'instruit. J'ai aussi été bien heureux de voir le patriarche de l'astronomie, le respectable Mr. *Olbers.* J'étais allé à Bremen avec MM. Schumacher et Repsold; notre unique but était de rendre visite à cet astronome célèbre qui peut être cité comme un modèle de vertu et de science. Il nous a fait passer les instans les plus agréables. Je ne vous citerai qu'un seul exemple de son aimable courtoisie: Il avait entendu de mon épouse, qui m'accompagnait, qu'elle aimait

beaucoup la musique allemande; la nuit nous fûmes éveillés agréablement par une sérénade, et MM. Schumacher et Repsold pensèrent comme nous, que nous en étions redevables au bon Mr. Olbers. Je n'ai pas besoin de vous dire avec quel intérêt j'ai visité l'observatoire où ont été découvertes Vesta et Pallas, ni avec quelle curiosité j'ai examiné les modestes instrumens qui ont servi à ces découvertes. — Comme j'espère aller en Italie vers la fin de l'année et que je passerais dans ce cas certainement par Genève, je remets à cette occasion les détails de mes excursions en Allemagne. Je suis à Berlin depuis peu de jours, mais j'y ai vû déjà des choses très intéressantes. — Je rouvre ma lettre pour faire un appel à votre mémoire: Vous vous rappellerez sans doute, que nous avons vû ensemble à Paris les grandes lunettes de Cauchoix et Lerebours, et qu'on les a dirigées alors sur l'anneau de Saturne. Si je ne me trompe MM. Arago, Biot, de Humboldt, Bouvard, etc. étaient présens, et l'on a reconnu le triple anneau; c'est-à-dire qu'on a vu la seconde séparation qui avait déjà été vue par Herschel, je crois. Le lendemain nous étions ensemble chez Mr. Bouvard et Mr. Laplace survint; vous lui demandates alors si l'hypothèse de l'existence de plusieurs anneaux était favorable aux idées reçues; sa réponse fut affirmative. Je vous prierais de me dire si vous vous rappelez que la seconde séparation a été effectivement observée. Mes souvenirs me le disent, mais je puis me tromper. J'en parlais dernièrement devant MM. Olbers et Schumacher qui s'étonnaient qu'on n'eût pas fait mention de l'observation; j'ai pris alors l'engagement de chercher à obtenir de nouveaux renseignemens des personnes qui étaient présentes. C'est sur vous que j'ai particulièrement compté. Les circonstances que je vous rappelle sont déjà bien loin de nous et peut-être les aurez vous perdues de vue. Je vous serais cependant fort obligé de me communiquer ce qui peut vous en rester encore.*) — MM. Mitscherlich, H. Rose et quelques autres savans partent après demain pour la Suisse et l'Italie.

---

*) Vergl. darüber noch Quetelet's Brief von 1831 II 6.

Al. Bouvard: Aix 1829 VIII 9. — Lorsque vous êtes passé à Aix, j'étais encore à Bonneville, et je ne suis arrivé ici que le premier août à 6 heures du soir. Hier matin, j'ai reçu votre lettre et de suite je me suis transporté à la poste pour reclamer vos lettres. J'ai ouvert celle qui contenait celle de Mr. Gambart que vous avez eu la complaisance de me renvoyer. — Mr. *Gambart* est arrivé à Aix avant hier matin. Nous comptons aller ensemble à Genève le 19 du courant. Comme je suis pressé de retourner à Paris, je ne puis disposer que d'un seul jour pour rester avec vous. Nous irons à Lausanne le 21 et le lendemain si je trouve une place à la diligence pour la France je partirai de suite afin d'arriver à Paris le 25 ou le 26. Je ne reçois pas de nouvelles de Paris, ce qui me tourmente singulièrement. Seriez-vous assez bon pour aller à la poste pour vous informer s'il ne se trouve pas pour moi des lettres postes restantes, et dans le cas me les envoyer à Aix. Mes respects à Madame votre mère et à Madame votre épouse, et mes amitiés à nos amis.

J. Plana: Turin 1829 VIII 23. — J'ai appris avec le plus grand plaisir que votre voyage a été heureux et que vous n'avez point souffert des fatigues inévitables. Dans ce moment je vous suppose tout occupé de la construction de votre nouvel observatoire, et je suis persuadé qu'il réussira conforme à vos désirs, et qu'il aura le suffrage de tous les astronomes. La ville de Genève vous sera reconnaissante pour le nouveau lustre que vous allez lui procurer. — N'en doutez pas, je vous suis infiniment reconnaissant pour la visite que vous m'avez faite, et je regrette seulement que la force des circonstances m'ait empêché de vous consacrer tous mes momens pendant le court séjour que vous avez fait ici. Mais votre bonté et votre amitié m'assurent que vous aurez excusé l'espèce d'abandon dans lequel je vous laissais pendant plusieurs heures. — Je vais m'établir à la campagne; mais je viendrais souvent à la ville pour y corriger les feuilles de mon ouvrage. Enfin le second Volume n'exige plus que huit jours de travail pour être achevé. Aussitôt après on commencera l'impression du troisième Volume. J'ignore quel sera le sort de cet ouvrage; mais il est certain que je le fais avec toute l'attention que je

suis capable. Je n'espère aucune récompense; c'est le seul amour de la science qui me soutient dans cette entreprise.

Ad. Gambart: Marseille 1829 X 1. — Mon cher et bon confrère, me voici de retour de très mauvaise humeur et presque comme cette volatile malheureuse, qui, maudissant sa curiosité, traînant l'aile et tirant le pied, demi-morte et demi-boiteuse, droite au logis s'en retourna. Tant malheureux que je sois, je ne puis pourtant maudire ma curiosité, puisque je lui dois le plaisir de vous avoir embrassé et d'avoir fait la connaissance des personnes bonnes et aimables à qui est de si près attachée votre destinée. Je suis bien souvent déjà revenu sur les marques d'amitié que vous m'avez données, et je vous assure que la distance qui nous sépare ne saurait jamais en affaiblir le souvenir. Le désir de me retrouver avec vous entrera toujours désormais pour sa bonne part dans tous mes plans de campagne, et j'en forme déjà. J'ai quitté Genève avec un vif regret; mon arrivée n'a point été plus gai, bien s'en faut, et c'est là le pis, puisqu'enfin c'est ici qu'il faut que je vive. L'habitude, la raison viendront à mon secours et les proverbes aussi, en sorte que je tâcherai de faire de nécessité vertu. Vous allez prendre une bien pauvre opinion de moi: elle ne sera jamais plus mauvaise, au reste, que celle que j'en ai moi-même. Depuis 4 jours je suis sequestré la jambe étendue, en attendant une guérison qui ne vient guère vite. Le voyage a singulièrement aggravé mon mal au pied, comme j'aurais dû le prévoir et vous aussi; c'est une école de plus que j'aie faite. Le père *Bouvard* a du moins été plus heureux; il me parle dans la lettre de Mr. *Airy* qu'il a été bien fâché de ne pas rencontrer. Mr. et Mme *South* étaient à Paris, quand il m'écrivait, mais seulement pour 10 jours. Je trouve aussi les Ephem. de Milan 1829 et un Mémoire de *Carlini* sur les oscillations du Baromètre, dont je vais tâcher de prendre connaissance immédiatement. Il y a donc un mouvement prononcé vers la météorologie. — Rien de changé à la position de mon observatoire. J'ai retrouvé tout en très bon ordre, mais il n'est pas question dans ma correspondance du placement de ma lunette, — j'en étais sûr du reste. On ne fera jamais de l'Astronomie en France; jamais, c'est à dire d'ici à longtems.

Souvenez-vous en bien. Je vous renouvelle de me dire, quand vous me ferez le plaisir de m'écrire, tout ce que vous savez des hommes et des ouvrages, tant en Astronomie qu'en physique et mathématique. Parlez moi à propos de la méthode qu'emploie *Pond* pour former son catalogue. Vous savez que nous devions en causer; mais j'oublie tout, excepté vous pourtant et Mr. *Wartmann* que j'aime aussi beaucoup.

Ad. Quetelet: Bruxelles 1830 III 19. — Notre Observatoire est terminé quant à la maçonnerie. On place maintenant les fenêtres, les planchers, etc. On me fait espérer que le bâtiment sera habitable à mon retour d'Italie vers le mois de Septembre. Mr. Gambey a terminé sa lunette méridienne dont on dit beaucoup de bien; il viendra placer lui même l'instrument. Quant aux instrumens anglais, je n'en entend pas parler; je viens d'écrire encore à Mr. South, dont je ne puis pas obtenir de réponse. Mr. Herschel m'avait promis de me tenir au courant de cette affaire; mais son mariage lui a probablement fait perdre de vue sa promesse. — Vous me demandez si j'ai vu employer en Allemagne la méthode de Bessel pour les observations dans le premier vertical; je vous dirai que Mr. Encke l'employait à Berlin et que ce savant vient justement de m'écrire qu'il s'en est fort bien trouvé; il me la recommande même. Il me recommande aussi la compensation des pendules par le mercure; il me dit qu'une pendule qui avait une marche détestable, est devenue très régulière par une compensation semblable. — Mr. Schumacher, qui était allé faire des observations du pendule dans un petit endroit de Danemark, dont j'ai oublié le nom, m'a écrit que le mauvais temps lui avait été très contraire. Vous savez que le bon Mr. Repsold est mort. — Si vous avez occasion d'écrire à Mr. Horner, veuillez lui dire que les aiguilles magnétiques sont prêtes, et que je n'attends plus qu'une occasion favorable pour les faire passer, selon ses désirs, à Mr. Brandes de Leipzig.

Ad. Gambart: Marseille 1830 IV 22. — Hier matin 21, on a observé à Marseille, une Comète dans la Constellation du petit cheval, par environ 317° 27′ d'asc. droite et 8° 37′ de déclinaison; il était $4^h \frac{1}{4}$. — Aujourdhui à $17^h 49^m 10^s$ de tems sidéral, la même comète suivait l'étoile δ du petit cheval de

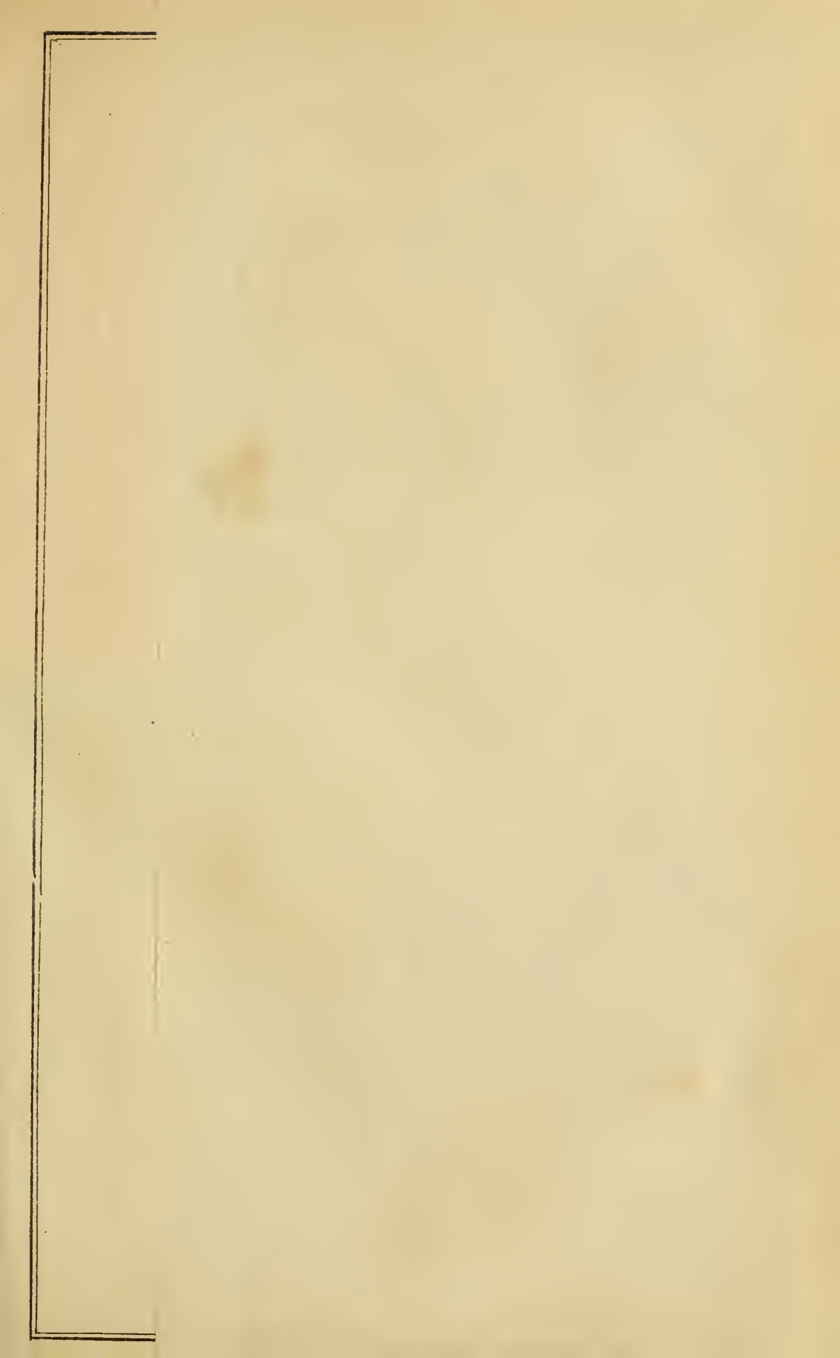
$4^m 1^s,4$ et se trouvait plus nord de 10′ 54″. Cette comète est très apparente.

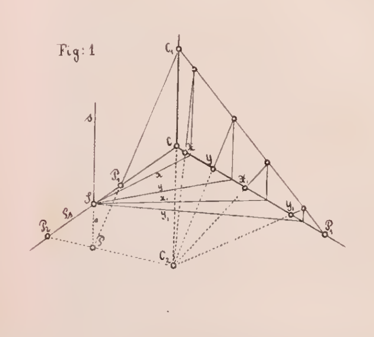
Al. Bouvard: *Paris 1830 V 1.* — Je viens de recevoir votre mémoire sur la latitude de Genève, que vous avez eû la complaisance de m'envoyer. Les exemplaires seront remis sous peu de jours aux personnes aux quels ils sont destinés. — J'aurai dû vous écrire depuis longtemps, ainsi qu'à Mr. Maurice, mon cher confrère; mais ma santé ayant été si mauvaise cet hiver, et même ce printemps, que je me suis trouvé si peu en état d'écrire que j'ai toujours différé de répondre à la plus grande partie des lettres que j'ai reçues dans le courant de cette année. — Mr. Cauchoix ayant été constamment malade, il n'a pas pu s'occuper des objectifs pour l'équatorial de votre observatoire. Ce n'est que depuis huit jours que j'ai deux objectifs pour en faire l'essai avec Nicollet qui veut bien m'aider. L'un de ces objectifs n'est pas bon et l'autre n'est pas encore entièrement satisfaisant. Mais heureusement Gambey n'est pas pressé et ce retard ne l'empêchera pas de continuer ses travaux. — Un jeune Géomètre, Mr. Verhulst, ami et élève de Mr. Quetelet est à Paris; il doit partir sous peu de jours pour Lyon et Genève. Mr. *Quetelet* qui devait également faire un voyage en Italie en passant par Paris et Genève, ne pourra pas probablement venir par la raison qu'il vient de perdre son beau père et son ami, un de mes compatriotes né en Savoie à quelques lieues de Genève. — J'ai reçu dans le temps deux exemplaires de la notice que j'ai lue au St Bernard, imprimée dans la Bibliothèque universelle, — mais sans le tableau qui l'accompagna etc. J'aurais désiré quelques exemplaires de plus, mais il est trop tard. J'ai vû dans la Bibliothèque universelle que les observations barométriques de Genève et du St Bernard paraissent toujours suivant la manière ancienne en pouces, lignes et 1/16 de lignes, et celles du St Bernard trois fois par jour seulement. Il me semble qu'il était convenu qu'à partir du premier janvier de cette année les observations seraient faites quatre fois par jour avec les nouveaux baromètres à large cuvette et divisés en millimètres ou en pouces et 1/10 de lignes. Veuillez, Monsieur, me dire dans votre prochaine lettre le motif de cette omission. — Mr. *Gambart* m'écrit souvent, et je

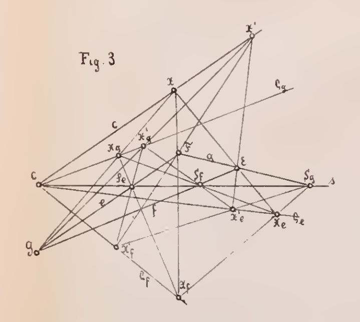
suis étonné qu'il ne vous écrive pas. Le 21 Avril il a trouvé une comète, et le 26 Mr. Nicollet l'a également trouvé. J'espère qu'avant peu de jours je recevrai de Marseille les élémens et alors nous saurons si elle est nouvelle. La santé de Mr. Gambart est bonne par moment et mauvaise par d'autres, à ce qu'il m'écrit. — La première fois que je verrai Mr. *Gambey* je lui parlerai du voyage de Genève; je ne doute pas qu'il s'empresse de satisfaire vos désirs. — Mes respects à Medames Gautier, mes amitiés à Mss. Maurice, Larive père et fils, et le bon jour à Mr. Wartmann.

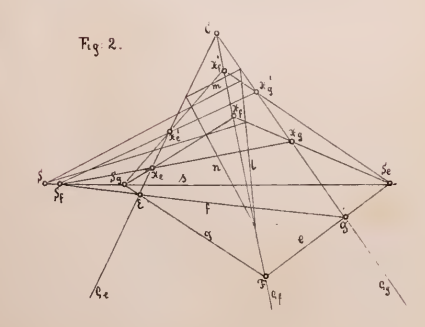
Capt. Filhon: Toulon 1830 V 5. — Je vous écris un peu à la hâte de Toulon, mon cher Professeur, pour vous mander qu'il m'a été impossible jusq'à ce jour de m'occuper à retoucher mon petit mémoire et par conséquent d'avoir l'honneur de vous l'adresser; prévenez-en, je vous prie, Mr. le Professeur Maurice, votre collégue, qui avait eu la bonté de me le renvoyer à Paris. Dès le 2 mars j'ai été nomé Chef de la Brigade des Ingénieurs Géographes de l'armée expéditionnaire d'Afrique, ce qui me porte naturellement à demander à la société de Physique et d'historire naturelle ses instructions, avant notre embarquement qui aura lieu sans aucun doute du 15 au 20. – Les nivellements géodésiques exécutés par les membres de l'institut d'Egypte ont fait connaître que la mer rouge est élevée de près de 9 mètres au dessus de la méditerranée. Les opérations récentes de la Carte de France, qui lient les Côtes de la Méditerrané et de l'Océan, ont démontré que ces deux mers sont sensiblement de niveau, résultat d'autant plus intéressant que l'existence du grand courant de Gibraltar avait fait supposer que la première de ces mers était moins élevée que la seconde. Je vais mettre tous mes soins à apporter de nouvelles lumières sur cette question par des mesures barométriques exécutées simultanément à Alger par les officiers sous mes ordres, et à Cadix par les astronomes de l'observatoire royal. (Forts. folgt.)

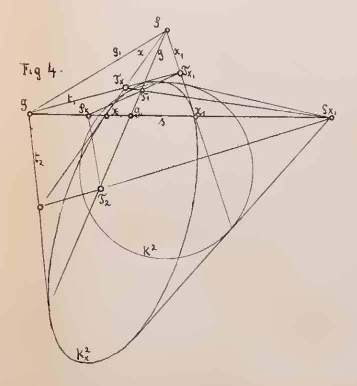
[R. Wolf.]

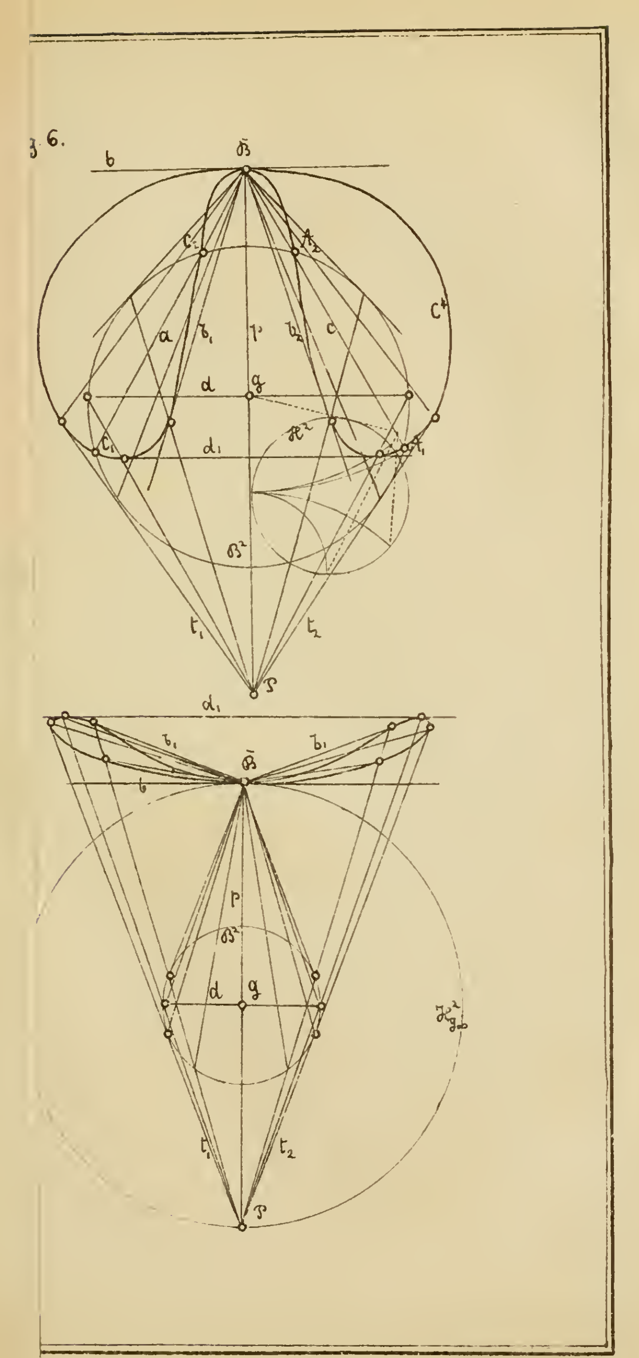



Fig: 1


Fig. 3


Fig: 2.


Fig 4.



6.
b
a
c
p
d
g
d₁
t₁
t₂

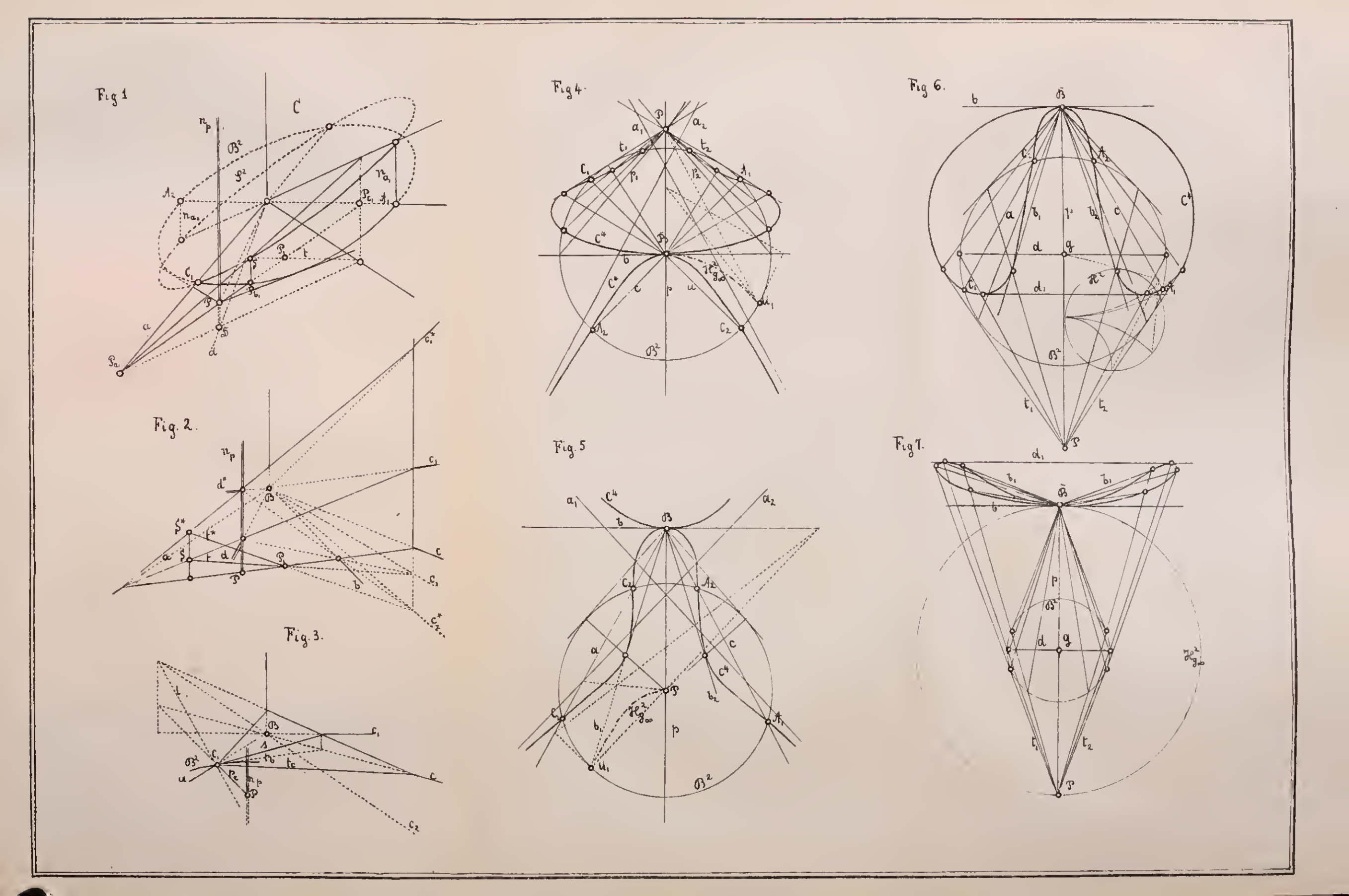

Fig 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig 4.
Fig. 5
Fig 6.
Fig 7.

Fig. 12.

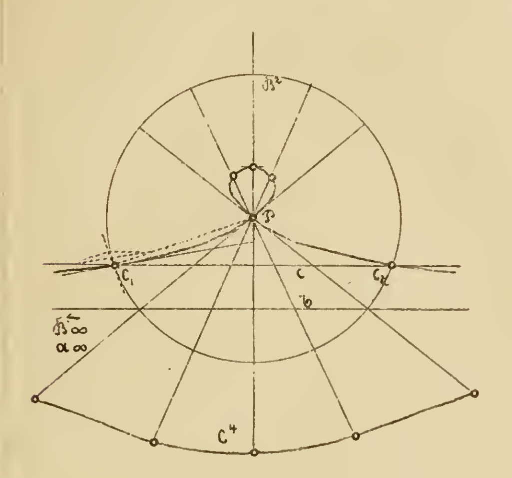
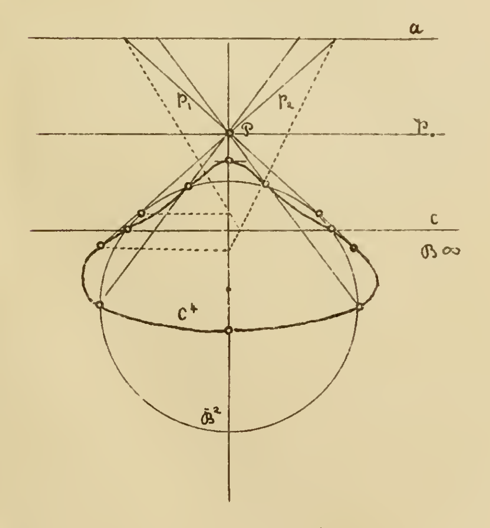
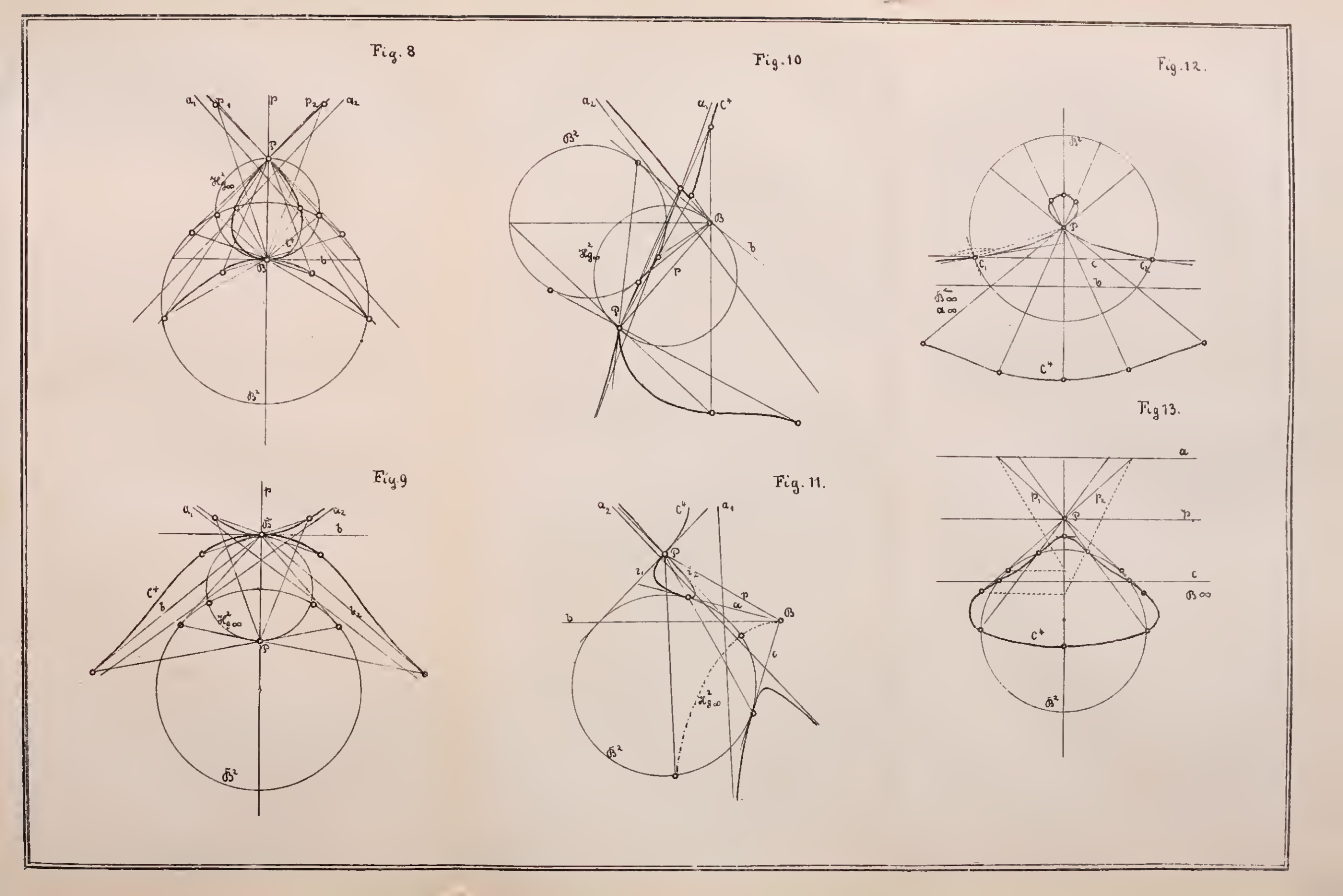


Fig 13.




Fig. 8
Fig. 10
Fig. 12.
Fig. 9
Fig. 11.
Fig 13.

Astronomische Mittheilungen

von

Dr. Rudolf Wolf.

LXVII. Beobachtungen der Sonnenflecken im Jahre 1885, sowie Berechnung der Relativzahlen und Variationen dieses Jahres, und Mittheilung einiger betreffender Vergleichungen; eilfte Serie der von Herrn A. Wolfer erhaltenen Sonnenfleckenpositionen; Fortsetzung der Sonnenfleckenliteratur.

Die Häufigkeit der Sonnenflecken konnte von mir im Jahre 1885 an 284 Tagen vollständig und mit dem seit Jahren dafür gebrauchten 2½ füssigen Pariser-Fernrohr, oder auf Excursionen mit einem annähernd equivalenten Münchner-Fernrohr, — und noch an 3 Tagen bei bewölktem Himmel wenigstens theilweise beobachtet werden; diese sämmtlichen Beobachtungen sind unter Nr. 522 der Literatur eingetragen, und die 284 vollständigen derselben wurden unter Anwendung des frühern Factors 1,50 zur Bildung einer ersten Reihe von Relativzahlen verwendet. Ausser ihnen lagen noch die unter Nr. 523 gegebenen 250 vollständigen und 2 theilweisen Beobachtungen vor, welche mein Assistent, Herr Alfred Wolfer, an dem Fraunhofer'schen Vierfüsser der Sternwarte bei Vergrösserung 64 erhalten hatte; ihre Vergleichung ergab mir für das
erste Semester aus 126 Vergleichungen den Factor 0,54
zweite » » 117 » » » 0,56
und mit diesen Factoren wurde aus ihnen eine neue Reihe von Relativzahlen berechnet, — sodann aus beiden Reihen eine Mittelreihe gebildet, welche sich in Tab. I ohne weitere Bezeichnung eingetragen findet. Es blieben so

Tägliche Fleckenstände im Jahre 1885. Tab. I.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1	22*	60	60*	41	69	74	85*	43	63	47	42	0*
2	34*	45	84	59	81	75	91	36	66	53	28	6
3	50*	57	92	57	54	85	84	27	75	42	33	4
4	53*	75	97	51	63	93	75	24	61	45	23*	3
5	42	84	99*	53	68	86	76	35	62	36	21*	0
6	48	74	93	59	72	78	73*	42	52	39	26*	0
7	40*	84	100*	66	98	84	62	60	40	43	36*	0*
8	10	106	67	72	108	81	59	60	42	51	30*	9*
9	6	90*	53	75	109	68	72	88	39	35	46*	8
10	3	62	54*	81	87	62	52	82	31	34	55*	0
11	0	78	44	76	73	59*	63	75	18	35	47*	19
12	9	60	46	77*	68	75	62	70	25	25*	35	18
13	10	83	53	57*	54*	70	59	73	23	7*	38*	22*
14	17	75	52	53	33	71	68	63	31	0	43	17*
15	33*	91	46	43	25*	89	91	59	22	0	52*	13
16	24	75	45	30	34	107	72	60	19	0	54	20
17	20	89*	43	28	36	117	71	35	29	8	57*	18
18	40*	93*	28	27	46	114	88	34	30	25	55*	23*
19	47*	100	29	21	50	94	77	51	24	40	60	33*
20	61*	92	26	34	67	96	67	51	12	34*	44*	37*
21	70*	90*	18	42	88	77	67	17	11	41	24*	54*
22	85*	90*	5*	65	80	73	65	16	39	35	20	25*
23	77*	64	0	55	81	104	56	33	32	55	16	36
24	74*	49	13	56	107	100	72	37	35	35	12	33
25	68*	45	29*	43	115	79	52	39	37*	75*	0	35*
26	34	35	38*	35	90	71	53	31	51	63	7	34
27	79	29	44	45	101	70	52	54	69	57	0	43
28	76	36	38*	90	84	64	67	69	55*	72	18*	51
29	75		49	87	80	83	54	72*	53	52*	6*	42*
30	68		53	73*	77	112	39	57	42	60	0*	36*
31	52		45		65		38	58		56*		35
Mittel	42,8	71,8	49,8	55,0	73,0	83,7	66,5	50,0	39,6	38,7	33,3	21,7

im ersten Semester noch 33, im zweiten Semester noch 41 Tage zum Ausfüllen, und hiefür wurden nunmehr in folgender Weise die Reihen verwendet, welche ich der gefälligen, und wenigstens zum Theil sehr prompten Mittheilung aus Athen, Gohlis bei Leipzig, Laibach, Lawrence Observatory, Madrid, Moncalieri, O-Gyalla, Palermo und Rom verdanke, und unter Nr. 533, 525, 524, 536, 530, 527, 535, 531 und 537 vollständig mittheile: Zuerst wurden für diese neun Reihen durch Vergleichung mit der Zürcher-Mittelreihe die Reductionsfactoren abgeleitet. Die Ergebnisse dieser Vergleichungen sind in folgendem Täfelchen enthalten, wo n die Anzahl der Vergleichungen und f den aus ihrer Gesammtheit erhaltenen Reductionsfactor bezeichnet:

Ort	Erstes Semester		Zweites Semester	
	n	f	n	f
Athen	132	1,58	131	1,20
Gohlis bei Leipzig .	95	0,84	57	0,88
Laibach	100	0,92	88	0,88
Lawrence Observatory	79	0,59	70	0,51
Madrid	92	0,60	103	0,55
Moncalieri	72	1,08	73	1,03
O-Gyalla	97	1,26	91	1,35
Palermo	128	0,54	131	0,47
Rom	123	0,95	129	0,97

Unter Anwendung dieser Factoren reducirte ich sodann die 63 Beobachtungen von Athen, die 34 B. von Gohlis, die 20 B. von Laibach, die 38 B. von Lawrence Observatory, die 36 B. von Madrid, die 25 B. von Moncalieri, die 32 B. von O-Gyalla, die 63 B. von Palermo und die

Monatliche Fleckenstände im Jahre 1885. Tab. II.

1885	I			II			III		
	m	*n*	*r*	*m*	*n*	*r*	*m*	*n*	*r*
Januar	6	15	31,4	1	17	33,7	1	31	42,8
Februar	0	22	67,2	0	24	67,8	0	28	71,8
März	1	22	46,6	1	23	48,7	1	31	49,8
April	0	27	54,6	0	27	53,5	0	30	55,0
Mai	0	29	80,5	0	29	75,3	0	31	73,0
Juni	0	29	82,1	0	29	84,6	0	30	83,7
Juli	0	29	61,4	0	29	65,7	0	31	66,5
August	0	30	47,7	0	30	49,3	0	31	50,0
September . . .	2	27	43,4	0	28	35,9	0	30	39,6
October	4	24	42,6	3	25	38,0	3	31	38,7
November . . .	3	13	26,8	2	13	26,9	3	30	33,3
December . . .	6	17	18,9	3	18	18,9	4	31	21,7
Jahr	22	284	50,3	10	292	49,9	12	365	52,2

51 B. von Rom, welche auf die in Zürich fehlenden 74 Tage fielen, und von ihnen

0	3	10	20	18	9	8	6	0	Tage
1	2	3	4	5	6	7	8	9	fach

decken, — und trug endlich die für die einzelnen Tage sich ergebenden Mittelwerthe unter Beisetzung eines * in Tab. I ein, zugleich je das definitive Monatmittel ziehend. — Es scheint mir auch diessmal nicht ohne Interesse in Tab. II speciell zu zeigen, welchen Einfluss diese successive Vervollständigung der täglichen Relativzahlen auf die Monatmittel hatte: Sie gibt zu diesem Zwecke unter I*r* die mittlern monatlichen Relativzahlen, wie sie sich aus meiner eigenen Beobachtungsreihe ohne irgend welchen Zusatz ergeben hatten, — unter II*r* ihre Beträge nach Zuzug der Serie Wolfer, — unter III*r* endlich ihre Beträge, wie sie sich schliesslich (Tab. I) nach Beiziehung der sämmtlichen

ausländischen Serien definitiv ergaben, — und zeigt natürlich in den Monaten, wo in Zürich wegen schlechter Witterung viele Tage ausfielen, einige erhebliche, jedoch keineswegs störende, und auf das Gesammtresultat wesentlich influirende Differenzen: Sie beweist einerseits, dass schon meine Serie allein ein ganz gutes Bild von dem Gange der Sonnenfleckenthätigkeit gibt, — anderseits aber auch die nicht unbedeutende Mühe der Vervollständigung nicht als überflüssig bezeichnet werden darf. Ueberdiess gibt Tab. II für jede der drei Stufen die Anzahl m der als fleckenfrei eingetragenen Tage, welche sogar in III gegenüber dem Vorjahre von 0 auf 12 gestiegen ist*), — ferner die Anzahl n der zu Grunde liegenden Beobachtungstage. Endlich zeigt Tab. II, dass die definitive mittlere Relativzahl des Jahres 1885

$$r = 52{,}2$$

zu setzen ist, dass sie also gegenüber dem Vorjahre um volle 11,2 zurückging. Es kann also die voriges Jahr vorläufig bestimmte

Maximums Epoche 1883,9

beibehalten, und es darf das Jahr 1885, welches das 39. Jahr meiner eigenen Sonnenfleckenbeobachtungen, das 137. meiner Reihe der monatlichen Relativzahlen und das 275. des Zeitraumes ist, für welchen ich den periodischen, im Mittel $11\frac{1}{9}$ Jahre erfordernden Wechsel der Fleckenhäufigkeit nachgewiesen und die Epochen der Maxima und Minima ermittelt habe, mit grosser Wahrschein-

---

*) Oder wenigstens auf 10, wenn die etwas unsichern I 11 und XI 25, wo Herr Wolfer meine Beobachtung am grösseren Fernrohr nicht controliren konnte und Herr Riccò in Palermo Flecken sah, weggelassen werden.

lichkeit als das zweite Jahr nach einem Maximum bezeichnet werden.

Der für das Jahr 1885 abgeleiteten mittlern Relativzahl

$$r = 52{,}2 \quad \text{entspricht} \quad \Delta v = 0{,}045 . r = 2',35$$

und es sollte sich somit, nach den in XXXV mitgetheilten Untersuchungen, im mittlern Europa die magnetische Declinationsvariation 1885 im Jahresmittel um 2',35 über ihren geringsten Werth oder die für

Christiania	4',62	nach	XXXV
Mailand	5,62	„	XXXVIII
München	6,56	„	XXXV
Paris	6,28	„	518
Prag	5,89	„	XXXV
Wien	5,31	„	400

betragende örtliche Constante meiner Formeln erhoben haben. Die betreffenden Rechnungen und Vergleichungen sind in Tab. III zusammengestellt: Der obere Theil dieser Tafel enthält ausser den für 1885 soeben gegebenen r und Δv, und den in Christiania laut Nr. 528 der Literatur, in Mailand laut Nr. 525, in München laut Nr. 538, in Paris laut Nr. 529, in Prag laut Nr. 534 und in Wien laut Nr. 532, aus den Beobachtungen hervorgegangenen Jahresmitteln der täglichen Declinationsvariation, die von mir in oben angegebener Weise berechneten Werthe, sowie die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Beträgen: Die Uebereinstimmung ist bei Christiania und Mailand ausgezeichnet, bei Prag und Wien ordentlich, und nur bei München, wo in den letzten Jahren das Beobachtungssystem Veränderungen erlitten hat, und bei Paris, wo noch immer keine definitive Formel aufgestellt werden konnte, unbefriedigend, — kann also im Ganzen als befriedigend bezeichnet werden. Der untere Theil der Tafel enthält für jeden Monat, sowie für das

Vergleichung der Fleckenstände und Variationen. Tab. III.

1885	r	Δv	v						
			Christiania	Mailand	München	Paris	Prag	Wien	Mittel
Beob.	52,2	—	7,06	7,95	7,80	7,73	7,83	7,38	7,62
Ber.	—	2,35	6,97	7,97	8,91	8,63	8,24	7,66	8,06
Diff.	—	—	0,09	-0,02	-1,11	-0,90	-0,41	-0,28	-0,44
1884/5	dr	dv'	dv''						
			Christiania	Mailand	München	Paris	Prag	Wien	Mittel
Jan.	-48,7	-2,19	-1,05	-1,44	-1,39	-0,70	0,22	-0,79	-0,86
Febr.	-15,1	-0,68	-3,41	-2,93	-3,86	-2,30	-2,11	-1,60	-2,70
März	-37,0	-1,66	-1,79	-2,69	-3,10	-1,90	-2,00	-2,00	-2,25
April	-21,1	-0,95	-1,25	-2,87	-3,14	-1,90	-2,95	-2,55	-2,44
Mai	6,5	0,29	-1,49	-0,16	-0,47	-1,50	-0,70	1,30	-0,50
Juni	32,5	1,46	0,40	-0,07	-0,22	-1,00	-0,07	0,71	-0,04
Juli	13,4	0,60	1,48	0,73	1,02	0,10	1,20	1,65	1,03
Aug.	- 5,8	-0,26	-0,17	0,61	-2,69	0,20	1,06	0,85	-0,02
Sept.	-22,3	-1,00	-1,65	-0,91	-2,05	-1,60	-1,02	-1,13	-1,39
Oct.	- 9,1	-0,41	-1,34	-2,05	-1,95	-2,70	-0,56	-1,17	-1,63
Nov.	- 3,3	-0,15	-0,75	-1,46	0,04	-1,20	0,39	0,34	-0,44
Dec.	-25,5	-1,15	-0,32	-0,75	-0,63	-1,20	-0,96	-0,31	-0,70
Jahr	-11,2	-0,50	-0,94	-1,16	-1,54	-1,31	-0,62	-0,39	-0,99

ganze Jahr, einerseits die Zunahmen dr, welche die monatlichen Relativzahlen des Jahres 1885 gegenüber denjenigen der gleichnamigen Monate des Jahres 1884 zeigen, und die daraus berechneten Werthe $dv' = 0{,}045 . dr$, — anderseits die entsprechenden Zunahmen dv'', welche die beobachteten Declinationsvariationen an den 6 Stationen zeigen, und ihre Mittelwerthe. Die Vergleichung der dv' mit den dv'' und ihren Mitteln zeigt im grossen Ganzen bei Beiden einen entsprechenden Gang; doch zeigen sich auch einige erhebliche Differenzen. Ob in Letztern etwas Systematisches liegt oder nicht, wird sich jedoch kaum mit Sicherheit entscheiden lassen, ehe eine grössere Anzahl von Jahrgängen solcher Vergleichungen vorliegt, als ich sie bis jetzt erstellen konnte.

Ich lasse nunmehr eine eilfte, die Rotationsperioden 316 bis 322 umfassende und den Abschluss der vor Demontirung des Refractors erhaltenen Beobachtungen bildende Reihe der von meinem Assistenten, Herrn A. Wolfer, erhobenen und berechneten Sonnenfleckenpositionen folgen, für die nöthigen Erläuterungen auf die frühern Mittheilungen verweisend:

Nr.	1884	p	ϱ	b	l	L	
				Rotationsperiode 316.			
1.	V 16.458	83°.73	907″	-14°.03	178°.37	0°.07	2 zus. häng. beh. Fl.
	»	84.16	912	-14.79	177.16	358.86	
	17.452	84.87	821	-13.86	192.83	0.35	
	»	85.34	831	-14.44	191.49	359.01	„ „
	18.477	87.82	698	-14.13	206.87	359.76	Westl. kl. Kern
	»	88.00	709	-14.47	205.86	358.75	Hauptkern
	19.479	93.40	542	-14.66	221.20	359.80	Westl. kl. Kern
	»	92.93	557	-14.44	220.03	358.63	Hauptkern
	27.482	239.35	905	-13.60	334.15	358.57	Beh. Fl. Vgl. R 315.1 u. R 317.1
2.	V 17.452	74.61	890	- 5.05	182.49	350.01	Kl. Fl.
	»	73.70	909	- 4.15	178.80	346.32	Beh. Fl.
	18.477	73.61	810	- 3.85	194.50	347.39	Gruppe m. östl. Hofe
	19.479	73.90	664	- 3.65	209.78	348.38	Fl. „ „
3.	V 18.477	79.45	931	- 9.33	173.99	326.88	Kern
	19.479	80.11	871	- 9.46	187.50	326.10	„
	27.482	239.42	613	- 9.69	301.21	325.63	Hof
	»	239.51	613	- 9.63	301.18	325.60	Kern
	28.494	242.23	758	- 9.64	315.27	325.26	Hof — Norm. beh. Fl.
	»	242.22	760	- 9.67	315.44	325.43	Kern — Vgl. R 315.3 u. 317.2
	29.494	244.02	865	- 9.41	329.33	325.05	Hof
	»	243.98	865	- 9.48	329.35	325.07	Kern
	30.483	244.75	932	- 9.59	344.44	326.05	Hof
	»	244.74	931	- 9.59	344.18	325.79	Kern
4.	V 27.482	14.85	365	18.14	249.48	273.90	Kern
	28.494	339.85	302	17.61	263.94	273.93	Hof
	»	339.73	302	17.58	263.97	273.96	Kern
	29.494	306.25	374	17.38	278.22	273.94	Hof — Beh. Fl.
	»	306.07	373	17.30	278.27	273.99	Kern
	30.483	288.60	509	16.97	292.21	273.82	Hof
	»	288.64	510	17.01	292.25	273.86	Kern
	27.482	14.48	395	19.80	248.50	272.92	Kleiner Fl.
	»	15.83	458	23.02	245.33	269.75	„

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L		
5.	V	28.494	358°.44	256″	14°.23	278°.59	268°.58	Hof	Beh. Fl.
		»	358.26	257	14.28	258.63	268.62	Kern	
		29.494	310.96	298	14.48	273.80	269.52	Hof	
		»	309.86	293	14.02	273.93	269.65	Westl. K.	
		»	312.00	298	14.64	273.52	269.24	Oestl. "	
		30.483	288.41	442	14.49	288.04	269.65	Hof	
		»	287.73	441	14.21	288.19	269.80	Westl. K.	
		»	288.78	440	14.57	287.83	269.44	Oestl. "	
	VI	3.636	270.13	928	13.89	346.97	269.33	Kern	
	V	27.482	34.49	407	14.62	241.52	265.94	V 27 und 28 kl. beh. Gruppe, nachher unbeh. Fleck	
		28.494	3.96	272	14.66	256.77	266.76		
		29.494	317.12	288	14.89	271.78	267.50		
		30.483	291.45	422	14.91	286.08	267.69		
		28.494	10.48	271	13.83	255.07	265.06	Kleiner Fl.	
		»	12.70	308	15.56	253.26	263.25	"	
		27.482	37.48	464	15.70	237.38	261.80	Centr. d. Gr.	Erst beh. Gruppe, dann beh. Fl.
		28.494	17.33	325	15.67	251.30	261.29	Hof	
		»	16.92	325	15.72	251.45	261.44	Kern	
		29.494	337.01	276	15.96	265.74	261.46	Hof	
		»	336.22	279	16.14	266.02	261.74	Westl. Kern	
		»	337.68	271	15.68	265.52	261.24	Oestl. "	
		30.483	303.63	363	16.19	279.63	261.25	Hof	
		»	302.78	371	16.34	280.24	261.85	Westl. Kern	
		»	303.84	358	16.01	279.34	260.95	Oestl. "	
6.	V	27.482	122.26	284	−14.01	250.06	274.48	Kleiner Fl.	
		28.494	175.99	217	−13.78	265.54	275.53		
		27.482	121.74	304	−14.83	249.04	273.46	"	
		28.494	166.35	234	−15.14	263.36	273.35		
		27.482	118.90	335	−15.57	246.88	271.30	Kern	Beh. Fl. Vgl. R 315.4 und R 317.6
		28.494	158.50	244	−15.68	261.31	271.30	Hof	
		»	158.39	243	−15.66	261.28	271.27	Kern	
		29.494	200.87	304	−15.59	275.12	270.84	Hof	
		»	201.20	303	−15.48	275.17	270.89	Kern	
		30.483	221.06	455	−15.83	289.19	270.80	"	
	VI	3.636	239.77	932	−15.94	348.28	270.64	"	
	V	27.482	107.53	325	−12.04	244.93	269.35	Fleck mit Hoftheilen	
		28.494	146.51	191	−11.98	259.20	269.19		
		29.494	205.42	243	−11.83	273.60	269.32		
		30.483	226.79	410	−12.13	287.59	269.20		
	VI	3.636	243.22	928	−12.49	347.12	269.48		
	V	27.482	104.55	310	−10.72	245.20	269.62	"	
		28.494	136.37	188	−11.04	257.36	267.35	"	
		29.494	205.55	221	−10.77	272.64	268.36		
		30.483	228.23	400	−11.32	287.27	268.88		

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L	
	V	29.494	203°.40	184"	- 9°.37	270°.77	266°.49	Fleck mit Hoftheilen
		30.483	230.65	377	- 9.81	286.24	267.85	"
		»	230.25	365	- 9.65	285.41	267.02	"
		29.494	190.59	217	-12.53	269.62	265.34	Kleiner Fl.
		30.483	221.57	364	-12.60	283.84	265.45	
		27.482	101.41	400	-12.37	239.40	263.82	Gruppe m. Hoftheilen
		28.494	126.46	230	-12.01	254.06	264.05	"
		29.494	186.68	201	-12.01	268.39	264.11	"
		30.483	221.40	351	-12.21	283.04	264.65	2 Fl. mit östl. Hofe
		»	219.99	336	-12.16	281.97	263.58	
	VI	3.636	243.68	915	-11.87	343.36	265.72	Behofter Fl.
7.	V	27.482	120.45	520	-24.58	237.56	261.98	Kleiner Fl.
		28.494	140.05	413	-24.37	251.65	261.64	
8.	V	27.482	110.53	625	-24.29	226.64	251.06	Kleiner beh. Fl.
		28.494	122.66	498	-24.16	240.52	250.51	"
		29.494	143.84	401	-24.11	254.45	250.17	Gruppe kl. Fl.
		30.483	175.82	399	-24.99	269.86	251.47	"
9.	V	28.494	64.49	922	8.71	186.11	196.10	Kleiner Fl.
		29.494	63.45	855	9.17	199.74	195.46	Pore
		30.483	61.07	786	10.62	209.45	191.06	"
10.	VI	9.449	246.56	896	-10.93	344.85	184.28	Sporad. kl. Fl.
11.	V	29.494	65.36	943	8.54	179.12	174.84	Kern (Beh. Fl. Vgl. R 315.10 und R 317.10)
	VI	30.483	65.29	900	8.41	193.09	174.70	Hof
		»	65.31	899	8.39	193.22	174.83	Kern
		3.636	48.41	293	8.03	252.45	174.81	Hof
		»	48.13	291	8.03	252.63	174.99	Westl. K.
		»	48.95	299	8.04	252.05	174.41	Oestl. "
		9.449	266.62	827	7.51	334.65	174.08	Hof
		»	266.65	827	7.54	334.65	174.08	Kern
	V	30.483	63.92	923	10.05	187.67	169.28	Behofter Fl.
	VI	3.636	47.06	375	10.83	247.87	170.23	Kleiner Fl.
12.	V	30.483	89.93	927	-15.37	186.56	168.17	Beh. Fl. Vgl. R 317.12?
	VI	3.636	112.51	431	-15.91	246.01	168.57	
		9.449	239.03	783	-15.53	328.10	167.53	
		3.636	104.15	543	-15.85	236.92	159.28	2 zusammen häng. beh. Flecke
		»	103.61	558	-16.00	235.75	158.11	
		9.449	236.08	710	-16.13	320.32	159.75	Behofter Fl.
		»	237.01	680	-14.08	317.70	157.13	Kleiner Fl.
13.	VI	3.636	101.22	676	-17.87	225.88	148.24	Kl. Fl. m. nördl. Hofe
14.	VI	9.449	287.32	551	16.79	306.07	145.50	Kleiner Fl.

Nr.	1884		p	ρ	b	l	L		
15.	VI	3.636	64°.02	776″	9°.62	214°.18	136°.54	Kleiner Fl.	
		»	65.41	790	8.65	212.46	134.82	Gruppe	
		»	66.36	806	8.04	210.58	132.94	Kleiner Fl.	
		»	65.12	814	9.18	209.76	132.12	"	Vgl. R 315.15
		»	64.22	842	10.31	206.30	128.66	"	
		9.449	277.51	378	8.00	296.36	135.79	"	
		»	293.99	352	12.96	292.02	131.45	"	
		»	297.48	318	12.72	289.48	128.91	"	
		»	289.50	282	9.31	288.98	128.41	"	
16.	VI	9.449	94.56	422	− 6.72	248.60	88.03	Hof	Beh. Fl.
		»	94.72	421	− 6.78	248.64	88.07	Kern	
		13.622	245.66	477	− 6.32	307.37	87.27	Hof	Vgl. R 315.19 und R 317.17
		»	245.63	476	− 6.31	307.30	87.20	Kern	
		14.594	250.06	646	− 6.26	321.36	87.39	Hof	
		»	250.05	645	− 6.24	321.23	87.26	Kern	
		9.449	100.13	432	− 9.31	248.69	88.12	Kleiner Fl.	
17.	VI	13.622	266.22	429	3.66	304.77	84.67	Sporad. kl. Fl.	
18.	VI	14.594	358.04	97	6.91	278.12	44.15	Kleiner Fl.	
		»	16.21	125	7.87	275.60	41.63	"	
19.	VI	9.449	72.83	924	5.43	196.36	35.79	"	
		13.622	69.38	395	5.29	253.71	33.61	"	
		»	71.06	453	5.11	249.71	29.61	"	
20.	VI	14.594	60.58	440	10.04	252.59	18.62	2 kl. Fl.	Vgl.
		19.490	274.76	652	9.56	326.61	22.79	Kl. Fl.	R 317.19?
21.	VI	13.622	84.25	651	− 2.20	234.71	14.61	Beh. Fl.	Vgl. R 315.22?
		14.594	87.08	479	− 2.41	248.79	14.82		
		19.490	255.93	548	− 2.52	318.64	14.82		
22.	VI	13.622	72.26	693	6.34	231.12	11.02	Beh. Fl., VI 19 kl.	Vgl. R 317.19?
		14.594	71.01	533	6.19	244.95	10.98		
		19.490	270.63	513	5.73	316.15	12.33		

Rotationsperiode 317.

Nr.	1884		p	ρ	b	l	L		
1.	VI	13.622	96.65	832	−14.08	217.74	357.64	Kl. Fl.	Vgl. R 316.1
		14.594	100.30	719	−14.21	231.49	357.52		
2.	VI	19.490	110.18	204	− 4.11	272.53	328.71	Kleiner Fl.	
		»	106.90	211	− 3.63	271.85	328.03	"	
		»	103.32	245	− 3.66	269.57	325.75	"	
		»	99.84	260	− 3.08	268.35	324.53	"	
		14.594	88.78	931	− 8.02	199.15	325.18		Beh. Fl.
		19.490	118.04	275	− 8.08	269.74	325.92	Hof	
		»	118.01	275	− 8.10	269.72	325.90	Kern	Vgl. R 316.3
		25.580	255.57	880	− 8.19	357.28	326.58		
		26.432	256.82	928	− 7.89	8.94	326.08		

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L	
3.	VI	19.490	66°.90	612″	11°.32	244°.17	300°.35	Kleiner Fl.
		25.580	279.14	661	11.28	333.41	302.71	"
		»	279.25	645	11.17	331.72	301.02	"
		26.432	277.53	781	11.13	345.62	302.76	Gruppe mit Hofsp.
		27.482	277.58	893	11.62	2.21	304.37	Theilweise beh. Fl.
		28.475	278.25	939	11.83	16.76	304.76	Kleiner Fl.
		25.580	281.03	613	11.90	328.90	298.20	Gruppe m. Hofspuren
		26.432	278.87	738	11.76	340.97	298.11	
		27.482	278.21	857	11.99	356.22	298.38	
		28.475	278.37	923	12.05	10.30	298.00	
4.	VI	19.490	65.56	753	14.46	231.77	287.95	Sporad. kl. Fl.
5.	VI	27.482	288.13	594	15.58	328.31	270.47	"
6.	VI	19.490	99.50	905	-15.67	211.43	267.61	Kl. Fl. Vgl. R 316.6
		25.580	198.16	324	-16.04	297.26	266.56	
		26.432	220.72	421	-16.04	309.25	266.39	
7.	VI	26.432	129.40	406	-14.92	271.46	228.60	Pore
		27.482	156.50	305	-15.09	284.70	226.86	Kleiner Fl.
		28.475	199.18	311	-15.05	299.57	227.57	Gruppe
		30.473	241.33	619	-14.54	331.29	230.78	Pore
		»	241.44	589	-13.56	329.09	228.58	"
		»	237.05	599	-16.38	328.62	228.11	Kleiner Fl.
	VII	1.475	244.07	739	-16.49	343.10	228.30	Pore
8.	VII	1.475	284.04	386	9.18	318.27	203.47	Fl. m. Hfthln.
		2.458	279.58	583	9.27	333.56	204.73	Beh. Fl.
		3.428	278.96	735	9.84	347.64	204.97	Nördl. Kern
		»	278.10	729	9.13	347.13	204.46	Südl. „
		4.476	278.87	855	10.03	2.66	205.04	Hof
		»	278.86	854	10.01	2.49	204.87	Kern
		5.440	279.57	925	10.27	17.39	206.02	„
		2.458	279.25	560	8.86	331.82	202.99	Fl. mit östl. Hofe
		4.476	276.95	838	8.27	0.33	202.71	Unbehofter Fl.
		5.440	277.87	916	8.67	14.89	203.52	"
		4.476	278.18	818	9.30	357.77	200.15	Kleiner Fl.
		2.458	279.32	500	8.34	327.45	198.62	
		3.428	277.29	662	8.15	341.11	198.44	„
		4.476	277.12	804	8.34	356.14	198.52	
	VI	30.473	322.52	130	9.28	298.52	198.01	VI 30 kleiner Fleck, dann behofter Fl., nach VII 3 wieder unbehoft
	VII	1.475	289.62	291	9.37	311.72	196.92	
		2.458	281.15	475	9.01	325.55	196.72	
		3.428	278.33	642	8.74	339.32	196.65	
		4.476	277.45	762	8.59	354.70	197.08	
		5.440	277.84	892	8.73	9.82	198.45	

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L		
9.	VI	28.475	71°.77	639″	15°.66	249°.80	177°.80	Sporad. kl. Fl.	
10.	VI	26.432	77.19	906	8.81	216.36	173.50	Beh. Fl., nach VII 4 klein	Vgl. R 316.11
		27.482	77.47	818	8.77	231.19	173.35		
		28.475	77.06	692	8.77	245.20	173.20		
		29.469	75.78	528	8.54	259.45	173.27		
		30.473	71.58	336	8.25	273.84	173.33		
	VII	1.475	49.54	140	8.22	288.19	173.39		
		2.458	307.10	132	8.04	302.15	173.32		
		3.428	284.01	318	8.02	315.85	173.18		
		4.476	279.22	520	8.14	330.87	173.25		
		5.440	278.11	680	8.32	344.57	173.20		
11.	VI	29.469	64.72	605	16.22	254.99	168.71	Kleiner Fl.	
		30.473	55.54	430	16.54	270.26	169.75		
	VII	1.475	34.88	284	16.88	285.08	170.28		
		2.458	356.69	227	17.09	296.27	167.44	„	
12.	VI	26.432	98.97	917	-12.30	214.84	171.98	Westl. K.	Grosser beh. Fl. Vgl. R 316.12
		»	99.48	922	-12.94	213.41	170.55	Oestl. „	
		27.482	101.59	840	-12.49	229.75	171.91	Hof	
		»	101.48	835	-12.27	230.45	172.61	Westl. K.	
		»	101.81	844	-12.76	229.31	171.47	Oestl. „	
		28.475	105.20	726	-12.40	243.97	171.97	Hof	
		»	105.29	719	-12.32	244.60	172.60	Westl. K.	
		»	105.24	731	-12.56	243.45	171.45	Oestl. „	
		29.469	111.60	578	-12.44	258.38	172.20	Hof	
		»	111.92	572	-12.46	258.99	172.81	Westl. K.	
		»	111.51	588	-12.70	257.57	171.39	Oestl. „	
		30.473	124.12	417	-12.53	272.77	172.26	Hof	
		»	125.64	413	-13.00	273.35	172.84	Westl. K.	
		»	123.46	425	-12.65	272.12	171.61	Oestl. „	
	VII	1.475	152.84	282	-12.68	287.48	172.68	Hof	
		»	154.62	287	-13.26	287.82	173.02	Westl. K.	
		»	150.44	289	-12.78	286.66	171.86	Oestl. „	
		2.458	196.79	274	-12.90	301.21	172.38	Hof	
		»	198.20	285	-13.43	301.87	173.04	Westl. K.	
		»	195.34	273	-12.98	300.80	171.97	Oestl. „	
		3.428	225.87	391	-13.36	314.86	172.19	Hof	
		»	226.75	400	-13.47	315.59	172.92	Westl. K.	
		»	225.62	387	-13.23	314.58	171.91	Oestl. „	
		4.476	240.87	559	-13.59	330.04	172.42	Hof	
		»	240.77	558	-13.62	329.95	172.33	Kern	
		5.440	247.96	704	-13.68	343.96	172.59	Hof	
		»	247.85	702	-13.70	343.79	172.42	Kern	
		7.439	255.32	906	-13.62	12.65	172.76	„	

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L	
	VII	2.458	190°.33	288″	-14°.30	299°.56	170°.73	Pore
	VI	26.432	99.31	937	-13.19	208.20	165.34	Kleiner Fleck, VI 28–30 mit Hof
		27.482	101.77	880	-13.57	223.87	166.03	
		28.475	105.32	785	-13.91	238.02	166.02	
		29.469	110.97	654	-14.21	252.28	166.10	
		30.473	120.60	501	-14.27	266.75	166.14	
	VII	1.475	140.00	355	-14.32	281.17	166.37	
		2.458	176.23	283	-14.33	295.17	166.34	
		3.428	216.08	361	-14.51	310.56	167.89	Kleiner Fl.
		4.476	231.40	549	-17.99	326.48	168.86	Kleiner beh. Fl., VII 7 ohne Hof
		5.440	240.67	689	-18.25	340.72	169.35	
		7.439	250.34	900	-18.13	10.52	170.63	
		3.428	207.95	361	-16.36	307.91	165.24	Kleiner Fl.
		4.476	231.41	508	-16.31	323.92	166.30	Kleiner beh. Fl.
		3.428	205.77	389	-18.40	308.09	165.42	Kleiner Fleck
		4.476	226.29	521	-19.08	322.93	165.31	"
		3.428	204.62	365	-17.21	306.87	164.20	"
		5.440	242.21	636	-15.48	336.89	165.52	"
13.	VI	27.482	74.89	925	11.54	212.49	154.65	Kleiner Fl.
		28.475	74.50	854	12.06	227.43	155.43	Kl. beh. Fl.
		29.469	73.97	738	11.90	242.11	155.93	Behofter Fl. m. 2 Kernen
		»	74.03	752	12.01	240.67	154.49	
		30.473	71.23	579	12.14	257.03	156.52	"
		»	70.84	591	13.15	256.11	155.60	
	VII	1.475	64.21	389	12.26	272.27	157.47	"
		»	64.18	403	12.59	271.41	156.61	
		2.458	41.07	201	11.97	287.41	158.58	"
		»	43.10	216	12.32	286.40	157.57	
		3.428	328.46	164	11.73	301.89	159.22	2 Flecke mit Hoftheilen
		»	333.10	179	12.91	301.59	158.92	
		4.476	295.10	340	12.04	317.04	159.42	Gruppe
		5.440	287.98	524	12.80	331.31	159.94	Beh. Gruppe
		7.439	283.51	819	12.90	0.65	160.76	Kleiner Fl.
	VI	30.473	72.59	597	11.57	255.45	154.94	Kleiner Fl.
	VII	1.475	66.22	419	12.11	270.07	155.27	
		4.476	303.36	314	13.80	314.17	156.55	Gruppe
		5.440	291.53	477	13.71	327.44	156.07	Behofter Fl.
		7.439	284.74	775	13.57	355.46	155.57	"
		8.483	284.29	878	13.56	10.01	155.23	"
		9.426	284.94	928	13.83	22.21	153.98	Kleiner Fl.
		7.439	283.36	781	12.48	356.20	156.31	Gruppe
		1.475	68.23	448	11.81	267.85	153.05	Kleiner Fl.
		2.458	55.67	261	11.55	282.15	153.32	

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L	
	VII	2.458	52°.63	264″	12°.36	282°.46	153°.63	Kleiner Fl., VII 4 Gruppe
		3.428	354.90	147	12.08	297.38	154.71	
		4.476	300.06	289	12.12	313.30	155.68	
		3.428	3.04	154	12.46	296.07	153.40	Kleiner Fl. Gruppe
		4.476	304.31	279	12.90	312.11	154.49	
		7.439	285.69	760	14.17	353.73	153.84	Kleiner beh. Fl.
		8.483	284.97	870	14.15	8.72	153.94	
		9.426	286.52	928	15.38	22.50	154.27	Kleiner Fl.
	VI	29.469	76.21	791	10.56	236.34	150.16	„
		30.473	75.34	656	10.46	250.45	149.94	
	VII	1.475	71.79	490	10.83	264.55	149.75	
	VI	29.469	74.44	802	12.15	235.17	148.99	„
		30.473	73.25	670	12.06	249.43	148.92	
	VII	1.475	69.58	507	12.24	263.61	148.81	
		2.458	57.56	287	11.90	280.43	151.60	„
		3.428	16.49	154	12.03	293.90	151.23	
		»	11.44	195	14.72	294.11	151.44	„
		4.476	297.89	365	13.68	318.15	160.53	„
		5.440	294.69	436	14.22	324.19	152.82	„
		»	300.16	394	15.28	320.52	149.15	„
		»	297.63	426	15.17	322.98	151.61	„
		8.483	286.28	846	15.17	5.07	150.29	
		9.426	286.29	911	15.18	17.65	149.42	
14.	VII	8.483	273.77	646	4.47	344.66	129.88	Pore
		»	276.09	595	5.95	340.58	125.80	„
		»	276.03	579	5.88	339.30	124.52	„
		9.426	276.23	760	5.98	356.06	127.83	Kleiner Fl.
15.	VII	2.458	96.43	796	− 5.25	239.06	110.23	Fl. m. Hfth.
		3.428	100.24	653	− 5.54	253.96	111.29	Beh. Fl.
		4.476	106.69	469	− 5.63	269.44	111.82	„
		5.440	118.27	293	− 5.26	282.86	111.49	„
		7.439	233.43	222	− 4.65	311.35	111.46	„ m. 2 Kernen
		»	231.33	218	− 4.87	310.86	110.97	
		8.483	252.58	427	− 4.94	326.94	112.16	2 kleine Fl.
		»	252.45	415	− 4.73	326.16	111.38	
		3.428	99.00	667	− 4.88	252.70	110.03	Kleiner Fl.
		»	99.95	691	− 5.92	250.68	108.01	„
		7.439	228.27	203	− 4.77	309.70	109.81	„
		»	220.00	192	− 5.48	307.98	108.09	„
		2.458	95.01	825	− 4.26	235.52	106.69	Fleck mit Hoftheilen
		3.428	97.30	704	− 4.17	249.22	106.55	„
		4.476	102.13	543	− 4.60	263.69	106.07	Behofter Fl.
		5.440	110.26	369	− 4.72	277.20	105.83	„

Nr.	1884		p	ρ	b	l	L	
	VII	7.439	216°.67	171″	− 4°.86	306°.69	106°.80	Kleiner Fleck
		8.483	246.00	364	− 5.96	322.02	107.24	"
		9.426	255.17	537	− 6.15	335.89	107.66	"
16.	VII	12.427	282.04	878	9.96	13.87	102.82	Sporad. kleiner Fl.
17.	VII	2.458	96.16	935	− 7.24	214.37	85.54	Beh. Fl. Vgl. R 316.16
		3.428	97.82	886	− 7.30	227.73	85.06	
		4.476	100.48	784	− 7.37	242.67	85.05	
		5.440	104.14	654	− 7.43	256.22	84.85	
		7.439	125.48	314	− 7.49	284.62	84.73	
		8.483	169.70	187	− 7.48	299.32	84.54	
		9.426	223.76	246	− 7.38	312.59	84.36	
		10.428	246.36	412	− 7.31	326.69	84.16	
		11.473	255.90	588	− 7.06	341.27	83.83	
		12.427	260.37	728	− 6.98	354.42	83.37	
		14.591	266.30	924	− 6.49	24.82	82.90	
		12.427	255.29	685	− 9.78	349.76	78.71	Kleiner beh. Fl.
		14.591	263.19	914	− 9.20	21.66	76.74	Kleiner Fl.
		12.427	252.76	686	−11.55	349.30	78.25	Kleiner beh. Fl.
18.	VII	3.428	81.15	923	8.18	218.50	75.83	Bis VII 8 behoft, nachher kleiner Fl.
		4.476	81.89	854	8.10	232.91	75.29	
		5.440	81.98	748	8.20	246.40	75.03	
		7.439	79.02	414	8.27	274.92	75.03	
		8.483	69.85	210	8.21	289.51	74.73	
		9.426	355.39	72	8.07	302.94	74.71	
		7.439	80.27	423	7.81	274.27	74.38	Kleiner beh. Fl.
		8.483	73.70	215	7.49	288.95	74.17	Kleiner Fl.
		»	78.38	211	6.40	288.97	74.19	"
		10.429	290.57	178	7.21	313.72	71.19	Pore
19.	VII	8.483	79.76	854	11.85	236.72	21.94	Kleiner Fl.
		9.426	79.38	737	11.82	251.40	23.17	
		10.428	77.67	573	11.69	266.63	24.10	
		8.483	79.80	867	11.86	234.86	20.08	"
		9.426	80.45	769	11.21	248.06	19.83	"
		10.428	78.58	585	11.30	265.67	23.14	" VII 11 dopp. Fl.
		11.473	74.50	384	10.82	281.34	23.90	
		»	74.85	391	10.80	280.84	23.40	
		12.427	56.06	194	11.03	295.74	24.69	
		14.591	294.11	345	11.21	327.71	25.79	
		8.483	79.42	879	12.24	232.92	18.14	Kleiner Fl.
		9.426	79.72	777	11.85	247.23	19.00	"
		10.428	78.61	618	11.63	263.02	20.49	"

Nr.	1884	p	ϱ	b	l	L	
	VII 11.473	73°.72	417″	11°.72	279°.23	21°.79	Kleiner Fl.
	12.427	59.85	215	11.06	294.14	23.09	Gruppe
	14.591	294.49	324	10.92	326.36	24.44	Behofter Fl.
	»	297.02	324	11.76	326.12	24.20	m. 2 Kernen
	15.600	287.64	528	10.99	341.83	25.51	Hof
	»	287.16	525	10.69	341.70	25.38	Kern
	16.435	285.87	669	11.01	353.97	25.74	Hof
	»	285.85	671	11.01	354.17	25.94	Kern
	17.437	286.00	804	11.62	8.54	26.02	Hof
	»	285.58	804	11.26	8.49	25.97	Kern
	18.574	285.90	905	11.15	25.00	26.26	Südl. Kern
	»	286.52	902	11.77	24.46	25.72	Nördl. „
	15.600	287.52	500	10.63	339.87	23.55	Kl. Fl.
	16.435	285.85	641	10.80	351.64	23.41	
	15.600	291.38	493	12.53	338.97	22.65	„ Vgl. R 316.20 u. 22? und R 318.17
	16.435	288.47	637	12.52	351.24	23.01	
	12.427	60.61	238	11.66	292.78	21.73	„
	14.591	300.26	272	11.42	322.55	20.63	
	15.600	289.05	464	10.95	337.15	20.83	
	12.427	58.31	267	13.12	291.56	20.51	Kleiner Fl.
	14.591	305.61	289	13.31	322.81	20.89	„
	15.600	294.61	455	13 44	335.91	19.59	„
	16.435	291.21	592	13.73	347.23	19.00	Fl. m. westl. Hofe
	17.437	288.90	742	13.66	1.66	19.14	Behofter Fl.
	»	289.12	735	13.70	0.93	18.41	mit 2 Kernen
	18.574	288.63	861	13.74	17.17	18.43	Kleiner Fl.
	12.427	68.67	271	10.66	289.92	18.87	Kleiner Fl.
	14.591	300.47	246	10.80	321.04	19.12	
	15.600	289.10	434	10.58	335.10	18.78	
	16.435	288.53	582	11.96	346.74	18.51	„
	17.437	287.27	735	12.27	1.05	18.53	
	11.473	76.75	469	11.17	275.34	17.90	„
	12.427	66.13	293	11.88	288.94	17.89	
	8.483	81.48	886	10.31	231.64	16.86	„
	14.591	310.43	254	13.34	320.16	18.24	„
	15.600	296.43	425	13.64	333.64	17.32	
	16.435	291.11	559	13.20	344.69	16.46	
	17.437	288.79	703	13.15	357.88	15.36	
	8.483	82.27	892	9.55	230.48	15.70	Kl. Fl.
	9.426	81.48	807	10.55	243.79	15.56	„ m. Hofth.
	10.428	81.24	676	10.38	257.95	15.42	Beh. Fl.
	11.473	78.93	504	10.52	272.70	15.26	„
	12.427	73.15	330	10.58	285.86	14.81	„
	8.483	80.52	896	11.23	229.77	14.99	Kl. Fl.
	9.426	80.46	815	11.47	242.82	14.59	„ m. Hofth.

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L		
	VII	10.428	80°.15	684"	11°.23	257°.31	14°.78	Behofter Fl.	
		11.473	77.94	515	11.18	271.98	14.54	„	
		12.427	70.24	331	11.56	286.09	15.04	Kleiner Fl.	
		14.591	313.78	193	11.70	316.57	14.65	„	
20.	VII	14.591	295.39	125	6.97	314.44	12.52		
		15.600	282.16	352	6.92	330.09	13.77	Kleiner Fl.	
		16.435	281.11	505	7.15	341.45	13.22		
		»	283.08	456	7.90	337.90	9.67		
		17.437	283.56	631	8.98	351.97	9.45	„	
		14.591	353.85	60	7.85	308.01	6.09	„	
		15.600	284.63	241	6.81	322.94	6.62	„	
		16.435	288.95	417	10.20	334.77	6.54	„	
					Rotationsperiode 318.				
1.	VII	11.473	102.25	897	− 8.01	233.57	336.13	Gruppe	
		12.427	104.94	812	− 8.18	247.36	336.31	Theilw. beh. Fl.	
		14.591	117.74	480	− 8.06	279.51	337.59	Kleiner Fl.	
		15.600	135.83	307	− 8.18	294.17	337.85	„	
		16.435	173.14	207	− 7.95	306.61	338.38	„	
		17.437	227.91	273	− 7.77	321.46	338.94	„	
		12.427	105.46	885	−10.26	237.10	326.05	„	
		14.591	116.70	573	−10.28	272.92	331.00	„	
		17.437	211.87	241	− 8.65	316.72	334.20	„	
		»	202.31	226	− 8.69	314.18	331.66	„	
		18.574	241.02	381	− 8.58	330.74	332.00	„	
2.	VII	17.437	102.00	914	− 5.50	235.35	252.83		
		18.574	105.42	821	− 6.16	251.89	253.15		
		22.473	157.10	217	− 6.52	308.23	253.86	Hof	
		»	157.21	217	− 6.53	308.25	253.88	Kern	Beh. Fl.
		23.446	217.52	219	− 6.56	322.46	254.21	Hof	
		»	217.43	219	− 6.56	322.42	254.17	Kern	
3.	VII	22.473	123.94	274	− 2.69	299.90	245.53	Behofter Fl.	
		23.446	182.34	129	− 2.81	315.08	246.83		
		»	170.91	129	− 2.45	313.57	245.32	Kleiner Fl.	
		»	157.94	153	− 3.05	311.22	242.97	„	Vgl. R 319.4
		»	153.43	170	− 3.53	310.01	241.76	„	
		22.473	122.26	350	− 4.32	295.31	240.94	Behofte Kerngruppe	
		23.446	153.34	202	− 5.13	308.91	240.66		
4.	VII	23.446	134.13	361	− 8.29	297.81	229.56	Kleiner Fl.	
		»	134.08	373	− 8.75	297.15	228.90	„	
		22.473	120.82	553	− 9.39	282.11	227.74	Gruppe	
		23.446	134.21	388	− 9.38	296.34	228.09	Unbeh. Fl.	
		22.473	120.39	571	− 9.62	280.68	226.31	Kleiner Fl.	
		23.446	132.22	411	− 9.54	294.60	226.35		

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L		
5.	VII	22.473	88°.84	771"	9°.74	260°.01	205°.64	Kleiner beh. Fl.	
		23.446	88.71	630	9.64	274.04	205.79	Unbehofter Fl.	
6.	VII	31.453	257.54	792	-16.11	16.47	193.99	Kleiner Fl.	
	VIII	1.453	261.95	888	-16.05	31.42	194.67	(cont.)	
		2.619	264.75	943	-16.41	48.53	195.15	(cont.)	
	VII	31.453	257.64	773	-16.39	14.49	192.01	"	
	VIII	1.453	261.60	872	-15.77	28.65	191.90	(cont.)	
7.	VII	31.453	258.21	624	-10.35	1.53	179.05	Sporadische Pore	
8.	VII	23.446	97.01	911	2.02	241.22	172.97	Kleiner Fl.	
9.	VII	31.453	231.99	383	-12.35	339.23	156.75	Kl. Fl.	Beh. Fl.
	VIII	1.453	251.37	545	-11.83	355.01	158.26	Hof	(cont.)
		»	251.35	546	-11.87	355.04	158.29	Kern	(cont.)
		2.619	261.64	725	-11.40	12.57	159.19	Hof	(cont.)
		»	261.58	725	-11.44	12.56	159.18	Kern	(cont.)
		3.454	265.67	826	-11.35	24.87	159.57	Hof	(cont.)
		»	265.62	827	-11.40	24.90	159.60	Kern	(cont.)
	VII	31.453	224.85	369	-13.33	336.34	153.86	Kleiner Fl.	
	VIII	1.453	248.00	521	-12.60	352.47	155.72	(cont.)	
		2.619	259.50	694	-12.01	9.32	155.94	(cont.)	
		3.454	263.30	796	-12.41	20.77	155.47	(cont.)	
	VIII	1.453	245.81	508	-13.07	351.00	154.25	"	
		2.619	256.67	673	-13.27	6.86	153.48	(cont.)	
	VIII	1.453	248.15	478	-10.89	349.83	153.08	"	
	VII	31.453	223.59	322	-11.07	334.21	151.73		VII 31 Fl. mit Hofth., dann beh. Fleck
	VIII	1.453	245.54	454	-11.04	347.68	150.93	Hof	(cont.)
		»	245.66	453	-10.97	347.68	150.93	Kern	(cont.)
		2.619	258.63	633	-10.77	4.19	150.81	Hof	(cont.)
		»	258.61	632	-10.75	4.11	150.73	Kern	(cont.)
		3.454	264.81	741	- 9.70	15.51	150.21	Nördl. K.	(cont.)
		»	263.67	734	-10.36	14.61	149.31	Hof	(cont.)
		»	262.62	737	-11.25	14.69	149.39	Südl. K.	(cont.)
10.	VII	31.453	219.13	216	- 6.00	329.69	147.21	Kleiner Fl.	
	VIII	1.453	254.63	402	- 5.73	346.75	150.00	"	
		2.619	266.34	629	- 5.80	5.48	152.10	Gruppe	
		3.454	269.97	738	- 5.72	16.19	150.89	Fl. m. Hofsp.	
	VII	31.453	220.23	232	- 6.76	330.40	147.92	Kleiner Fl.	
		»	219.81	192	- 4.61	329.09	146.61	"	
	VIII	2.619	265.81	582	- 5.12	1.86	148.48	2 kleine Fl.	
		»	268.65	548	- 2.81	359.81	146.43	Kl. Fl. m. Hofspuren	
		3.454	273.03	679	- 2.42	11.39	146.09	(cont.)	

Nr.	1884	p	ϱ	b	l	L		
	VII 31.453	215°.48	173″	− 3°.93	327°.78	145°.30	Kleiner Fl.	
	VIII 1.453	254.95	333	− 3.60	342.79	146.04	Kl. beh. Fl.	
	2.619	265.73	545	− 4.37	359.15	145.77	„	
	3.454	270.80	674	− 3.90	10.60	145.30	Beh. Fl.	
	»	268.42	678	− 5.63	10.64	145.34	Kleiner Fl.	
11.	VII 31.453	262.43	143	2.79	331.71	149.23	Hof	
	»	262.48	144	2.78	331.79	149.31	Kern	
	VIII 1.453	273.99	358	2.48	346.44	149.69	Hof	
	»	274.49	358	2.67	346.47	149.72	Kern	Beh. Fl.
	2.619	278.05	579	2.27	3.14	149.76	Hof	
	»	278.15	580	2.31	3.21	149.83	Kern	
	3.454	280.05	706	2.32	14.49	149.19	Hof	
	»	280.01	704	2.30	14.29	148.99	Kern	
	VII 31.453	231.81	101	0.96	327.49	145.01	Kleiner Fl.	
	»	235.73	46	3.64	325.44	142.96	„	
	»	186.73	56	2.25	323.24	140.76	„	
	»	172.02	38	3.44	322.74	140.26	„	
	»	119.41	24	5.14	322.10	139.62		
	VIII 1.453	278.85	198	5.02	336.49	139.74	Kl. theilweise beh. Fl.	
	2.619	281.59	441	4.98	353.34	139.96		
	3.454	283.32	591	5.27	5.04	139.74		
	VII 31.453	144.23	50	3.56	321.30	138.82		
	VIII 1.453	270.36	188	3.40	335.66	138.91		
	2.619	277.49	434	3.14	352.72	139.34	„	
	3.454	279.67	587	3.02	4.60	139.30		
12.	VIII 2.619	306.67	475	17.20	353.93	140.55	Kleiner Fl.	
	»	307.24	449	16.88	352.55	139.17		
	3.454	302.32	583	16.89	3.40	138.10	„	
	2.619	311.05	435	18.14	350.42	137.04	„	
13.	VII 31.453	75.60	256	12.07	309.08	126.60	Sporadische Pore	
14.	VIII 1.453	149.96	90	1.58	320.85	124.10	Sporad. kl. Fl.	
15.	VIII 1.453	70.63	201	11.79	313.75	117.02	Kleiner Fl.	
	2.619	310.90	144	10.02	333.28	119.90	Pore	
	»	316.08	107	9.35	330.97	117.59	„	
	3.454	293.24	321	9.21	345.99	120.69	Kleiner Fl.	
16.	VII 31.453	92.87	767	9.64	269.16	86.78	Kleiner Fl.	
	VIII 1.453	93.55	603	9.37	284.77	88.02	Kl. beh. Fl.	
	2.619	93.58	375	8.56	302.28	88.90	„	
	3.454	90.56	201	8.12	314.30	89.00	Hof	
	»	90.33	201	8.19	314.27	88.97	Kern	

Nr.	1884	p	ϱ	b	l	L	
	VIII 8.438	288°.30	767″	7°.04	25°.44	89°.04	Hof
	»	288.30	768	7.03	25.57	89.17	Kern
	9.442	289.28	874	6.87	39.88	89.16	Hof
	»	289.21	874	6.82	39.83	89.11	Kern
	10.452	290.61	933	6.41	53.86	88.73	„
	1.453	92.18	625	10.34	283.05	86.30	Kleiner Fl.
	2.619	90.56	438	10.31	298.17	84.79	
	3.454	86.66	288	10.20	309.09	83.79	
	1.453	91.95	663	10.64	279.97	83.22	Kleiner beh. Fl.
	2.619	90.63	463	10.49	296.43	83.05	
	3.454	86.43	301	10.45	308.30	83.00	
17.	VIII 3.454	90.56	921	12.58	248.68	23.38	Kleiner beh. Fl.
	8.438	66.05	232	14.63	319.70	23.30	Kleiner Fl.
	9.442	356.58	136	14.01	334.71	23.99	„
	»	12.19	104	12.45	332.36	21.64	„ Vgl. R 317.19
	10.452	315.56	264	14.20	347.34	22.21	„
	11.587	298.28	480	12.03	4.38	23.05	„
	»	296.95	470	11.27	3.75	22.42	„
18.	VIII 8.438	106.95	231	5.21	317.04	20.64	Kleiner Fl.
	9.442	239.18	32	4.79	333.49	22.77	„
	10.452	281.73	263	5.14	349.18	24.05	„
	11.587	285.92	494	5.76	5.64	24.31	Kl. beh. Fl.
	12.475	285.99	645	5.48	17.97	23.98	Behofter Fl.
	13.595	288.06	815	6.19	35.62	25.65	„
	8.438	98.34	239	7.35	316.55	20.15	Kleiner Fl.
	9.442	121.01	4	6.10	331.91	21.19	„
	»	70.46	2	6.23	332.01	21.29	„
	10.452	286.94	229	6.57	347.11	21.98	Unrglmss. beh.
	11.587	287.01	464	6.38	3.60	22.27	Kleiner Fl.
	12.475	288.70	606	6.91	14.96	20.97	Kl. Fl. m. Hoftheilen
	13.595	290.65	777	7.57	31.45	21.48	
	»	289.14	780	6.32	31.73	21.76	„
	8.438	106.38	272	5.19	314.46	18.06	Kleiner Fl.
	9.442	123.04	52	5.16	329.17	18.45	„
	10.452	277.93	173	4.88	343.52	18.39	Unrglmss. beh.
	11.587	283.38	411	4.90	359.91	18.58	Kl. beh. Fl.
	12.475	285.00	585	4.68	13.20	19.21	„
	13.595	288.48	761	5.89	29.75	19.78	„
	15.586	292.35	938	6.67	60.44	22.06	Behofter Fl.
	9.442	90.68	65	7.08	328.26	17.54	Kleiner Fl.
	11.587	293.22	402	9.10	359.26	17.83	„
	»	292.00	370	8.44	357.16	15.83	Kl. Fl. m. Hoftheilen
	12.475	290.73	556	8.20	11.07	17.08	

Nr.	1884	p	ϱ	b	l	L	
	VIII 13.595	292.°93	724″	9°.50	26°.18	16°.21	Kleiner Fl.
	8.438	100.44	293	6.92	313.13	16.73	Erst kleiner Fleck, nach VIII 9 kleiner behofter Fl.
	9.442	94.03	83	7.04	327.13	16.41	
	10.452	288.81	133	6.72	341.18	16.05	
	11.587	288.80	358	7.18	356.64	15.13	
	12.475	289.12	527	7.27	8.93	14.94	
	13.595	290.03	709	7.36	24.78	14.81	

Rotationsperiode 319.

Nr.	1884	p	ϱ	b	l	L	
1.	VIII 8.438	119.20	711	− 7.16	284.37	347.97	Kleiner Fl.
	»	118.04	720	− 6.49	283.42	347.02	Kl. beh. Fl. }
	9.442	124.53	569	− 6.84	297.61	346.89	Gruppe m. Hofth. }
	10.452	137.71	394	− 7.22	312.57	347.44	Kleiner Fl. }
	11.587	184.83	260	− 9.43	331.33	350.00	Kleiner Fl.
	12.475	225.40	298	− 9.51	341.18	350.19	
	11.587	175.50	273	− 9.44	328.59	347.26	"
	»	165.33	229	− 5.85	327.27	345.94	"
	12.475	218.98	217	− 5.78	340.29	346.30	
	15.586	268.51	713	− 9.99	24.31	345.93	"
	9.442	122.74	590	− 6.33	295.72	345.00	"
	»	122.63	613	− 6.81	294.04	343.32	"
	10.452	135.21	429	− 7.50	310.00	344.87	
	8.438	117.47	777	− 7.36	277.73	341.33	" }
	9.442	112.99	640	− 7.74	291.97	341.25	Gruppe }
	10.452	133.19	476	− 8.23	306.70	341.57	Kleiner Fl. }
	11.587	155.71	269	− 6.43	323.78	342.45	"
	12.475	196.99	230	− 7.68	5.42	341.43	"
2.	VIII 8.438	111.23	926	− 5.73	254.00	317.60	Kern — Normal beh. Fl.
	9.442	113.80	857	− 5.82	268.41	317.69	"
	10.452	117.37	744	− 5.90	282.85	317.72	Hof
	»	117.35	743	− 5.86	282.98	317.85	Kern
	11.587	123.80	572	− 5.97	299.20	317.87	Hof
	»	123.66	571	− 5.87	299.24	317.91	Kern
	12.475	132.92	418	− 5.87	311.98	317.99	Hof
	»	132.81	416	− 5.78	312.04	318.05	Kern
	13.595	162.93	239	− 5.87	328.24	318.27	Hof
	»	163.14	238	− 5.85	328.32	318.35	Kern
	15.586	253.55	361	− 5.79	356.71	318.33	Hof
	»	253.64	362	− 5.77	356.76	318.38	Kern
	16.579	266.45	531	− 5.70	10.74	318.20	Hof
	»	266.53	532	− 5.67	10.80	318.26	Kern

Nr.	1884	p	ϱ	b	l	L	
3.	VIII 13.595	163°.44	340″	-11°.30	324°.88	314°.91	Kl. Fl. } Gruppe
	15.586	238.66	393	-11.62	354.47	316.09	Gruppe
	16.579	256.88	545	-11.02	9.38	316.83	„
	13.595	156.34	343	- 9.96	322.67	312.70	Kleiner Fl.
	15.586	229.69	362	-12.23	350.34	311.96	„ }
	16.579	250.71	492	-11.90	4.30	311.76	2 kl. Fl. m. Hofsp.
	13.595	153.04	383	-11.09	319.94	309.97	} Kleiner Fl.
	15.586	227.94	332	-10.99	348.74	310.36	
4.	VIII 13.595	111.03	910	- 3.12	263.09	253.12	Kern } Norm. beh. Fl., zuletzt kl. Fl.
	15.586	117.02	700	- 3.28	291.55	253.17	} Hof
	»	116.98	699	- 3.24	291.64	253.26	Kern
	16.579	122.18	541	- 3.21	305.73	253.19	} Hof } Vgl. R 318. 3
	»	122.08	540	- 3.14	305.75	253.21	Kern
	24.442	284.16	905	- 2.78	58.33	253.61	Kl. Fl.
	15.586	121.36	697	- 6.32	292.55	254.17	} Kleiner Fl.
	16.579	128.06	536	- 6.24	307.14	254.60	
5.	VIII 24.442	288.00	479	5.21	16.96	212.24	} „
	25.463	290.42	672	5.41	32.77	213.48	
	24.442	286.74	480	4.57	16.95	212.23	Kleiner beh. Fl.
	»	284.57	425	3.99	12.97	208.25	Kleiner Fl. }
	25.463	288.15	623	4.21	28.55	209.26	Behofter Fl.
	24.442	285.36	384	4.62	10.46	205.74	Kl. Fl. }
	25.463	289.17	587	5.09	25.85	206.56	„ m. Hofsp.
	28.456	293.84	926	4.90	67.80	205.81	Kl. beh. Fl.
	24.442	282.37	383	3.47	10.18	205.46	Beh. Fl. m. 2 K. }
	25.463	287.35	593	3.94	26.18	206.89	Fl. m. Hoftheil.
	»	286.47	584	3.48	25.42	206.13	„
	24.442	281.82	320	3.89	6.15	201.43	} 2 getr. Hoffl. }
	»	281.21	299	3.99	4.38	199.66	
	25.463	286.11	524	3.78	20.97	201.68	} 3 Kerne im gleichen Hofe
	»	286.11	514	3.87	20.25	200.96	
	»	286.09	505	3.94	19.63	200.34	
6.	VIII 24.442	213.71	451	-20.55	353.89	189.17	} Kleiner beh. Fl.
	25.463	235.86	530	-20.29	8.17	188.88	
	28.456	264.30	865	-20.28	50.96	188.97	
	24.442	198.58	375	-17.38	346.35	181.63	Kleiner Fl.
7.	VIII 24.442	139.36	498	- 9.18	319.38	154.66	} Kl. Fl. mit Hoftheilen
	25.463	158.54	341	- 9.02	333.90	154.61	
	24.442	136.42	493	- 7.67	318.96	154.24	} Kleiner Fl.
	25.463	156.03	319	- 7.39	334.22	154.93	
	»	157.49	284	- 6.10	336.07	156.78	„
	24.442	130.71	514	- 5.52	316.34	151.62	„

Nr.	1884	p	ϱ	b	l	L		
8.	VIII 25.463	77°.14	254"	14°.83	334°.19	154°.90	Kern	
	28.456	310.75	429	15.20	16.47	154.48	Hof	
	»	310.25	434	15.05	16.83	154.84	Kern	Grosser
	30.453	304.53	747	14.94	44.53	154.05	Hof	beh. Fl.
	»	304.41	751	14.87	44.92	154.44	Kern	
	31.466	304.36	860	14.85	58.93	154.00	Hof	Vgl. R 320.13
	»	304.39	863	14.88	59.28	154.35	Kern	
	IX 1.464	305 31	929	15.00	73.30	154.13	„	
	VIII 21.442	89.79	470	15.43	317.78	153.06	Kleiner Fl.	
	25.463	78.98	289	15.43	331.92	152.63		
	24.442	90.20	501	15.75	315.54	150.82	„	
	25.463	83.35	303	14.56	330.49	151.20	2 kleine Fl.	
	»	83.70	319	14.83	329.44	150.15		
	28.456	314.49	364	15.43	11.74	149.75	Hof	
	»	314.33	362	15.30	11.65	149.66	Kern	
	30.453	304.37	705	14.58	40.49	150.01	„	
	31.446	304.03	836	14.58	55.60	150.67	Thlwse beh. Fl.	
	IX 1.464	305.09	910	15.06	68.59	149.52	Kleiner Fl.	
	VIII 30.453	308.10	705	17.32	40.25	149.77	Hof	
	»	307.98	705	17.23	40.20	149.72	Kern	
	31.466	307.24	835	17.39	55.41	150.48	Hof	
	»	307.22	832	17.36	54.98	150.05	Kern	Beh. Fl.
	IX 1.464	307.61	910	17.46	68.53	149.36	„	
	2.450	308.59	950	17.29	83.19	149.96	„	
9.	VIII 28.456	156.48	364	− 9.32	335.01	113.02	Sporad. Gruppe kl. Fl.	
10.	VIII 25.463	122.71	891	− 9.81	279.79	100.50	Kleiner Fl.	
	28.456	139.40	492	− 8.38	323.43	101.44	„	
	31.466	238.53	310	− 8.19	4.98	100.05	„	
	IX 1.464	260.18	477	− 8.77	20.05	100.88	„	
11.	VIII 28.456	147.46	620	−17.33	317.65	95.66	Kleiner Fl.	
	30.453	187.71	410	−17.86	346.57	96.09	„	
	»	177.31	451	−18.88	340.97	90.49	„	
12.	VIII 28.456	131.82	707	−10.88	305.85	83.86	Beh. Fl.	
	30.453	155.68	407	−10.93	334.52	84.04	Kl. beh. Fl.	
	31.466	187.37	303	−11.03	349.06	84.13	„	
	IX 1.464	228.01	325	−10.85	3.36	84.19	Kl. Fl. m. Hofsp.	
	2.450	253.12	453	−10.76	17.57	84.34	Kleiner Fl.	
13.	VIII 25.463	103.38	930	7.41	268.79	89.50	Kleiner. Fl.	
	28.456	107.54	604	7.13	310.97	88.98		

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L	
14.	IX	6.470	267°.79	732″	-13°.95	45°.13	54°.55	Unbehofter Fl.
		»	266.61	695	-13.48	41.51	50.93	Kleiner Fl.
15.	VIII	30.453	140.97	753	-18.59	306.32	55.84	} „
		31.466	150.17	627	-18.62	320.90	55.97	
		30.453	137.58	757	-16.29	304.85	54.37	} „
	IX	1.464	159.50	494	-16.20	333.35	54.18	
	VIII	30.453	136.00	772	-15.68	302.87	52.39	Kleiner Fl. }
		31.466	144.49	637	-15.94	318.03	53.10	Behofter Fl. }
	IX	1.464	158.05	501	-16.02	332.43	53.26	„ }
		2.450	180.84	399	-16.13	346.52	53.29	2 kleine Fl. }
	VIII	30.453	141.46	795	-20.73	302.33	51.85	} Kleiner Fl.
		31.466	149.82	673	-20.60	317.45	52.52	
	IX	1.464	162.64	541	-19.84	332.26	53.09	
		2.450	182.98	452	-19.80	346.15	52.92	
	VIII	30.453	139.73	799	-19.61	301.21	50.73	Kl. beh. Fl. }
	IX	1.464	158.40	564	-19.35	329.18	50.01	Kleiner Fl. }
		2.450	179.47	458	-19.53	344.33	51.10	„ }
		1.464	155.79	555	-17.76	328.63	49.46	} Kleiner Fl.
		2.450	174.07	446	-17.68	342.30	49.07	
	VIII	30.456	136.10	801	-16.85	299.87	49.39	} „
	XI	1.464	153.97	559	-17.19	327.59	48.42	
		2.450	171.54	444	-16.99	341.28	48.05	
16.	IX	5.466	302.59	114	8.14	5.12	28.86	Sporad. kl. Fl.
17.	IX	5.466	0.29	188	17.45	2.80	26.54	} Kleiner Fl.
		6.470	324.53	341	17.48	17.81	27.23	
		5.466	8.25	180	17.47	1.11	24.85	„
18.	IX	6.470	285.48	237	4.99	13.65	23.07	Sporad. kl. Fl.
19.	IX	6.470	24.60	190	18.44	358.89	8.31	Sporad. kl. Gruppe

Rotationsperiode 320.

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L	
1.	IX	6.470	158.17	306	- 6.44	346.31	355.73	Kl. Fl. m. östl. Hofe
2.	IX	5.466	144.01	728	-18.57	315.15	338.89	Kleiner Fl.
		»	141.66	749	-17.84	312.37	336.11	„
3.	IX	10.473	301.28	109	7.81	9.80	322.11	Sporad. kl. Fl.

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L		
4.	IX	5.466	127°.25	902″	-11°.65	289°.37	313°.11		
		6.470	130.97	812	-11.70	303.77	313.19	Unbehofter Fl.	
		10.473	200.76	306	-11.72	2.39	314.70		
		6.470	133.69	859	-15.61	298.65	308.07	Kl. Fl.	
		10.473	187.34	383	-15.71	356 66	308.97	Gruppe	
5.	IX	10.473	198.94	481	-23.11	0.82	313.13		
		13.464	252.25	691	-23.14	42.05	311.69	Behofter Fl.,	
		14.421	260.42	795	-22.99	55.78	311.09	IX 16 klein	
		15.470	265.98	883	-22.88	70.18	311.20		
		16.472	269.44	936	-22.79	83.60	310.32		
		10.473	187.89	509	-24.00	354.29	306.60	Kleiner Fl.	
6.	IX	6.470	100.24	881	14.03	290.92	300.34	Pore	
		10.473	81.27	192	12.99	353.22	305.53	2 theilw.	
		»	78.22	202	13.84	353.03	305.34	beh. Fl.	
		13.464	307.48	528	13.22	39.54	309.18	Hof	
		»	307.46	528	13.20	39.59	309.23	Kern	Grosser
		14.421	305.18	698	12.79	54.36	309.67	Hof	beh. Fl.
		»	305.36	699	12.93	54.43	309.74	Kern	Vgl.
		15.470	305.28	826	12.95	68.61	309.63	Hof	R 321.4
		»	305.35	828	13.01	68.86	309.88	Kern	
		16.472	305.96	912	13.01	82.72	309.44	Hof	
		»	306.23	916	13.22	83.52	310.24	Kern	
		17.460	307.76	953	13.59	96.97	309.60	"	
		14.421	303.44	670	11.46	51.96	307.27	Kleiner Fl.	
		»	306.62	668	13.65	51.66	306.97	"	
		»	307.64	668	14.37	51.57	306.86	"	
		15.470	305.23	814	12.92	67.18	308.20	"	im Hofe d.
		»	306.09	805	13.64	66.14	307.16	"	gr. beh. Fl.
		10.473	82.96	222	13.58	351.36	303.67	"	
		13.464	309.59	477	13.76	35.81	305.45	"	
		»	310.34	472	14.06	35.38	305.02	"	
		14.421	306.22	643	13.23	49.60	304.91	"	
		13.464	312.96	473	15.34	35.18	304.82	2 kleine Flecke	
		»	315.02	446	15.84	33.05	302.69	Fleck mit Hofspuren	
		»	305.47	436	11.40	33.23	302.87	Kleiner Fl.	
		14.421	306.98	622	13.59	47.80	303.11		
		15.470	305.81	776	13.36	62.95	303.97	"	
		10.473	89.66	264	13.10	348.25	300.56	"	
		14.421	310.34	592	15.40	45.16	300.47	"	
		10.473	103.84	252	9.23	348.01	300.32	Behofter Fl.	
		13.464	301.55	399	9.44	30.91	300.55	Kleiner Fl.	
		10.473	88.21	311	14.59	345.58	297.89	2 Fl. mit östl.	
		»	91.51	311	13.58	345.18	297.49	Hofansätzen	

Nr.	1884		p	ρ	b	l	L	
	IX	13.464	311°.28	406″	13°.55	30°.77	300°.41	Fl. m. Hofth.
		»	312.65	397	13.98	30.08	299.72	"
		»	316.82	400	15.68	29.76	299.41	Unrglm.beh.Fl.
		»	314.76	372	14.36	28.18	297.82	"
		14.421	310.43	577	15.32	43.98	299.29	
		»	311.50	568	15.83	43.16	298.47	4 Kerne im
		»	308.52	570	14.11	43.63	298.92	gleichen Hofe
		»	308.96	556	14.22	42.49	297.78	
		15.470	307.79	731	14.75	58.31	299.33	Hofitcentrum
		»	308.68	733	15.45	58.47	299.49	
		»	308.99	725	15.62	57.63	298.65	4 Kerne im
		»	306.86	726	14.02	57.90	298.92	gleichen Hofe
		»	307.16	713	14.17	56.63	297.65	
		16.472	307.44	848	14.68	72.39	299.11	Hof
		»	307.94	842	15.11	71.64	298.36	Nördl. Kern
		»	306.53	837	13.88	70.99	297.71	Südl. "
		17.460	308.45	919	15.14	85.41	298.04	Nördl. "
		»	306.92	917	13.68	84.92	297.55	Südl. "
		10.473	109.77	321	7.78	343.54	295.85	Kleiner Fl.
		»	109.30	350	7.96	341.66	293.97	"
		16.472	308.62	821	15.67	68.92	295.64	"
		»	310.23	786	16.87	64.84	291.56	
		17.460	310.39	882	17.18	78.29	290.92	"
7.	IX	18.467	276.19	807	-11.64	65.75	264.01	"
		19.473	281.99	911	-10.06	82.61	266.52	"
		»	279.87	891	-11.31	78.54	262.45	"
		20.455	283.14	945	-10.51	92.20	262.10	"
8.	IX	10.473	112.52	717	5.28	314.45	266.76	Hof
		»	112.66	717	5.17	314.46	266.77	Kern
		13.464	125.62	152	5.01	357.24	266.88	Hof
		»	125.48	151	5.04	357.29	266.93	Kerngruppe
		14.421	271.65	81	5.04	11.65	266.96	Hof
		»	271.90	82	5.04	11.71	267.02	Kern
		15.470	288.53	296	4.78	26.15	267.17	Hof
		»	288.62	296	4.81	26.14	267.16	Kerngruppe
		16.472	292.52	498	4.87	40.54	267.26	Hof
		»	292.39	497	4.81	40.51	267.23	Kerngruppe
		17.460	294.56	670	4.88	54.70	267.33	Hof
		»	294.58	671	4.89	54.74	267.37	Kern
		18.467	296.22	808	4.90	69.00	267.26	Hof
		»	296.14	808	4.83	68.97	267.23	Kern
		19.473	297.53	904	4.72	83.30	267.21	Hof
		»	297.54	902	4.75	83.13	267.04	Kern
		20.455	298.96	951	4.64	97.32	267.22	"

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L	
	IX	13.464	113°.91	219″	6°.76	352°.89	262°.53	Kleiner Fl.
		10.473	110.66	784	6.22	307.79	260.10	Hof
		»	110.70	784	6.18	307.71	260.02	Kern
		13.464	114.16	272	6.58	349.62	259.26	Hof
		»	114.04	272	6.61	349.58	259.22	Kern
		14.421	117.83	58	6.68	3.64	258.95	Hof
		»	117.02	60	6.72	3.55	258.86	Kern
		15.470	294.53	163	6.83	18.04	259.06	Hof
		»	294.31	163	6.79	18.01	259.03	Kern
		16.472	296.68	383	7.19	32.88	259.60	Hof
		»	296.76	383	7.23	32.91	259.63	Kern
		17.460	297.94	578	7.49	47.51	260.13	Kl. beh. Fl.
		18.467	298.69	741	7.38	62.25	260.51	„
9.	IX	13.464	111.84	841	5.15	304.26	213.90	Hof
		»	111.31	837	5.64	304.68	214.32	Südl. Kern
		»	112.15	846	4.82	303.66	213.30	Nördl. „
		14.421	113.79	715	4.83	318.58	213.89	Hof
		»	114.23	718	4.48	318.37	213.68	Südl. Kern
		»	112.97	711	5.46	318.91	214.22	Nördl. „
		15.470	115.82	547	4.78	333.22	214.24	Hof
		»	116.59	551	4.31	332.95	213.97	Südl. Kern
		»	114.69	543	5.44	333.51	214.53	Nördl. „
		16.472	120.59	355	4.14	347.53	214.25	Hof
		»	120.47	354	4.18	347.54	214.26	Kern
		17.460	131.87	144	4.24	1.87	214.50	Kern
		»	132.35	143	4.18	1.93	214.56	Hof
		18.467	270.77	102	4.33	16.72	214.98	Kern
		»	270.33	101	4.32	16.62	214.88	Hof
		19.473	287.59	312	4.07	30.97	214.88	Hof
		»	287.58	313	4.05	31.05	214.96	Kern
		20.455	291.52	507	3.92	45.00	214.90	Hof
		»	291.57	507	3.94	44.98	214.88	Kern
		21.469	293.93	682	3.89	59.53	214.96	Hof
		»	293.86	681	3.84	59.46	214.89	Kern
10.	IX	16.472	98.23	561	15.03	333.53	200.25	
		17.460	90.99	326	14.33	351.39	204.02	
		»	91.40	358	14.88	349.33	201.96	
		»	90.19	418	16.63	345.65	198.28	
		18.467	42.21	97	12.37	9.36	207.62	Gruppe von veränderlichen kl. Fl.
		»	60.08	170	15.10	5.05	203.31	
		20.455	319.45	364	15.38	34.06	203.96	
		»	324.61	332	16.28	31.34	201.24	
		21.469	309.38	561	13.78	49.77	205.20	
		»	311.10	538	14.51	47.93	203.36	

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L	
11.	IX	14.421	103°.04	929″	12°.31	289°.35	184°.66	Kleiner Fl., IX 17 mit Hofspuren, IX 25 kl. behofter Fleck
		15.470	103.69	845	12.57	305.31	186.33	
		16.472	103.90	716	12.44	320.37	187.09	
		17.460	102.64	547	12.44	335.24	187.87	
		18.467	98.86	343	12.03	350.58	188.84	
		19.473	75.93	131	11.70	5.88	189.79	
		20.455	326.32	144	11.18	20.55	190.45	
		25.483	305.39	933	11.02	95.77	193.94	
		16.472	104.15	729	12.28	319.15	185.87	Kl. Fl.
		17.460	102.64	560	12.54	334.32	186.95	„ m. Hofth.
		18.467	98.64	361	12.36	349.40	187.66	Unbehofter Fl.
		19.473	80.40	159	12.13	4.08	187.99	Fleck m. Hfthln.
		20.455	339.85	128	12.14	18.63	188.53	Kleiner Fl.
		21.469	312.59	332	12.33	33.82	189.25	Gruppe
		17.460	103.01	573	12.42	333.25	185.88	Fleck m. Hfthln.
		18.467	99.29	377	12.34	348.29	186.55	Unbehofter Fl.
		20.455	344.28	124	12.37	18.03	187.93	„
		17.460	104.12	580	11.80	332.68	185.31	Fleck m. Hfthln.
		19.473	86.07	187	12.10	2.04	185.95	„
		20.455	346.16	102	11.50	16.96	186.86	„
		21.469	313.21	299	11.99	31.70	187.13	„
		25.483	305.96	899	12.00	88.52	186.69	Kleiner Fl.
		19.473	88.15	145	10.64	4.24	188.15	Fleck m. Hoftheilen
		»	89.48	171	11.12	2.65	186.56	„
		20.455	340.19	99	10.97	17.33	187.23	Kleiner Fl.
		21.469	311.26	305	11.48	32.21	187.64	Fl. m. östl. Hofe
		17.460	101.81	585	13.23	332.42	185.05	Fl. m. Hofansatz
		19.473	82.42	195	12.96	1.99	185.90	„
		20.455	354.73	113	12.63	16.56	186.46	„
		21.469	315.78	294	12.66	31.15	186.58	„
		25.483	306.27	891	12.33	87.27	185.44	Kleiner Fl.
		18.467	95.83	404	14.10	346.85	185.11	Fl. m. östl. Hofe
		19.473	79.33	204	13.80	1.86	185.77	„
		20.455	355.19	124	13.21	16.86	186.76	„
		17.460	103.94	594	11.98	331.60	184.23	Fleck m. Hoftheilen
		21.469	321.72	256	13.41	28.26	183.69	„
		17.460	99.68	618	14.83	329.96	182.59	Kleiner Fl.
		18.467	95.47	451	15.03	343.77	182.03	Kl. beh. Fl.
		19.473	82.07	274	15.50	357.69	181.60	Behofter Fl.
		20.455	32.34	152	15.84	11.87	181.77	Kleiner Fl.
		21.469	330.78	261	15.70	27.36	182.79	„
		16.472	102.41	772	13.76	314.84	181.56	„
		17.460	102.48	639	13.17	328.13	180.76	3 Kerne im gleichen Hofe
		»	101.76	641	13.66	327.97	180.60	
		»	100.70	643	14.38	327.90	180.53	

Nr.	1884		p	ρ	b	l	L	
	IX	18.467	96°.94	472″	14°.64	342°.17	180°.43	Behofter Fl.
		19.473	85.31	291	15.16	356.27	180.18	"
		20.455	40.33	151	14.48	10.61	180.51	"
		21.469	336.05	226	15.52	24.72	180.15	Unbehofter Fl.
		17.460	99.20	640	15.36	328.26	180.89	Thlwse beh. Fl.
		18.467	94.80	477	15.76	342.06	180.32	Kl. beh. Fl.
		19.473	82.88	305	16.24	355.82	179.73	"
		20.455	43.32	159	15.81	9.98	179.88	Fl. m. Hoftheilen
		21.469	339.67	225	16.10	24.08	179.51	Unbehofter Fl.
		15.470	101.55	883	14.38	299.82	180.84	Kleiner Fleck
		16.472	104.40	779	12.16	314.13	180.85	"
		18.467	101.16	463	12.52	342.38	180.64	"
12.	IX	18.467	116.22	644	4.06	328.77	167.03	2 kleine Fl.
		19.473	119.82	461	3.61	343.43	167.34	Kleiner Fl.
		20.455	125.19	251	3.91	358.13	168.03	"
		21.469	174.12	55	3.96	12.39	167.82	"
		18.467	113.12	676	5.98	325.95	164.21	2 kleine Flecke
		20.455	116.12	295	6.12	355.07	164.97	Kleiner Fl.
		21.469	145.66	73	4.52	10.30	165.73	"
		19.473	112.51	508	7.03	339.85	163.76	Behofter Fl.
		20.455	111.00	316	7.71	353.73	163.63	Kl. beh. Fl.
		21.469	101.77	101	8.12	8.13	163.56	Fl. m. Hofansatz
		25.483	301.35	699	8.74	65.13	163.30	Gruppe
		26.460	302.85	836	9.46	80.26	164.49	Kleiner Fl.
		21.469	111.85	97	7.06	8.22	163.65	Fleck mit Hofansatz
13.	IX	16.472	100.53	944	14.76	286.73	153.45	Kern
		17.460	101.59	891	14.58	300.42	153.05	Hof
		»	101.59	892	14.58	300.24	152.87	Kern
		18.467	101.90	793	14.46	314.60	152.86	Hof
		»	101.85	793	14.47	314.62	152.88	Kern
		19.473	101.33	658	14.23	328.61	152.52	Hof
		»	101.31	658	14.24	328.63	152.54	Kern
		20.455	98.68	491	14.15	342.61	152.51	Hof
		»	98.74	491	14.11	342.63	152.53	Kern — Beh. Fl.
		21.469	89.78	301	14.19	357.09	152.52	Hof — Vgl.
		»	89.78	300	14.16	357.16	152.59	Kern — R 319.8
		25.483	312.01	572	15.07	54.28	152.45	Hof
		»	311.95	572	15.03	54.28	152.45	Kern
		26.460	310.31	723	15.32	67.99	152.22	Hof
		»	310.23	723	15.27	68.01	152.24	Kern
		27.476	309.89	847	15.51	82.64	152.37	Hof
		»	309.88	846	15.50	82.61	152.34	Kern
		28.463	310.28	923	15.61	96.35	152.00	Hof
		»	310.33	924	15.67	96.47	152.12	Kern

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L		
	IX	20.455	91°.52	447″	16°.78	346°.61	156°.51	Kl. Fl.	
		21.469	75.34	272	17.05	0.92	156.35	Gruppe	
		16.472	98.80	950	16.20	283.51	150.23	Kern	
		17.460	99.71	906	16.26	297.68	150.31	„	
		18.467	99.95	818	16.17	311.77	150.03	Hof	
		»	100.00	817	16.12	311.93	150.19	Kern	
		19.473	98.76	690	16.31	325.99	149.90	Hof	
		»	98.88	691	16.23	325.92	149.83	Kern	
		20.455	95.66	532	16.29	340.08	149.98	Hof	
		»	95.83	531	16.19	340.08	149.98	Kern	
		21.469	86.81	350	16.34	354.54	149.97	Hof	
		»	86.88	351	16.33	354.49	149.92	Kern	
		25.483	316.87	541	17.36	51.36	149.53	Hof	
		»	316.81	540	17.32	51.33	149.50	Kern	
		26.460	313.71	694	17.56	65.14	149.37	Hof	
		»	313.63	694	17.48	65.07	149.30	Kern	
		27.476	312.38	825	17.62	79.83	149.56	Hof	
		»	312.29	824	17.51	79.69	149.42	Kern	
		28.463	312.37	910	17.69	93.64	149.29	„	
		29.483	313.33	955	17.86	108.22	149.32	„	
		25.483	313.49	529	15.35	50.95	149.12	Kleiner Fl.	
		26.460	311.03	686	15.57	64.69	148.92		
		25.483	315.82	503	16.14	48.80	146.97	„	
		26.460	312.31	666	16.25	62.78	147.01		
14.	IX	25.483	255.61	326	− 6.19	33.17	131.34	Hof	
		»	255.48	326	− 6.23	33.16	131.33	Kern	
		26.460	271.52	498	− 6.46	47.42	131.65	Hof	
		»	271.52	500	− 6.52	47.53	131.76	Kern	
		27.476	278.70	669	− 6.96	62.08	131.81	Hof	Beh. Fl.
		»	279.12	671	− 6.73	62.33	132.06	Kern	Vgl.
		28.463	282.97	805	− 7.11	76.41	132.06	Hof	R 321.8?
		»	282.97	805	− 7.11	76.45	132.10	Kern	
		29.483	285.96	903	− 7.09	90.98	132.08	Hof	
		»	285.94	902	− 7.09	90.83	131.93	Kern	
		30.469	287.76	953	− 7.42	105.61	132.65	„	
		25.483	249.91	283	− 5.70	29.98	128.15	Kleiner Fl.	
		27.476	276.66	627	− 7.22	58.40	128.13	„	
		28.463	282.99	776	− 6.42	73.42	129.07	„	
		29.483	285.38	879	− 6.95	87.06	128.16	Gruppe	
		30.469	287.67	947	− 7.13	102.77	129.81	Behofter Fl.	
		29.483	283.08	870	− 8.76	85.37	126.47	Kl. beh. Fl.	
		30.469	284.92	937	− 9.35	99.25	126.29	Behofter Fl.	
		20.455	128.69	822	− 8.08	315.74	125.64	Kleiner Fl.	
		21.469	133.39	688	− 8.11	330.61	126.04	„	

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L		
	IX	25.483	240°.98	287″	− 7°.57	28°.09	126°.26	Behofter Fl.	
		26.460	264.23	434	− 7.56	41.84	126.07	Kl. Fl.	
		27.476	275.44	603	− 7.36	56.42	126.15	"	
		28.463	281.26	746	− 7.05	70.22	125.87	" m.Hfthln.	
		29.483	285.36	859	− 6.46	84.25	125.35	"	
		30.469	287.81	929	− 6.24	97.51	124.55	Kleiner Fl.	
		25.483	238.95	272	− 7.11	27.04	125.21	Behofter Fl.	
		26.460	263.94	413	− 6.95	40.59	124.82	"	
		27.476	275.83	583	− 6.59	55.02	124.75	Unbeh. Fl.	
		29.483	285.51	851	− 6.13	83.21	124.31	Kl.Fl.m.Hofth.	
		25.483	232.67	254	− 7.00	24.98	123.15	Kleiner Fl.	
		26.460	262.00	392	− 6.87	38.97	123.20		
		»	261.76	410	− 7.64	39.93	124.16	Klein behoft	
		19.473	126.83	935	−10.15	295.71	119.62	Kleiner Fl.	
		20.455	129.12	869	− 9.79	309.80	119.70		
15.	IX	21.469	144.05	746	−17.43	328.53	123.96	"	
		25.483	231.16	407	−15.92	28.97	127.14	"	
16.	IX	21.469	123.92	827	− 4.09	315.31	110.74	"	
17.	IX	25.483	116.47	402	5.65	353.21	91.38	"	
		»	114.56	434	6.37	351.04	89.21	"	
18.	IX	25.483	135.29	817	−12.97	322.66	60.83	Hof	
		»	135.39	816	−13.04	322.79	60.96	Kern	
		26.460	140.89	699	−13.23	336.46	60.69	Hof	
		»	140.99	698	−13.29	336.52	60.75	Kern	
		27.476	150.56	555	−13.55	350.79	60.52	Hof	
		»	150.63	556	−13.61	350.78	60.51	Kern	
		28.463	167.37	420	−13.72	4.76	60.41	Hof	Normal
		»	167.35	420	−13.72	4.75	60.40	Kern	beh. Fl.
		29.483	197.92	336	−13.78	19.12	60.22	Hof	Vgl.
		»	197.94	336	−13.78	19.12	60.22	Kern	R 321.12
		30.469	232.51	369	−13.75	33.11	60.15	Hof	
		»	232.54	369	−13.72	33.10	60.14	Kern	
	X	2.470	266.90	640	−13.90	61.65	60.14	Hof	
		»	266.90	641	−13.92	61.72	60.21	Kern	
		4.480	277.66	878	−14.13	90.19	60.00	Hof	
		»	277.63	877	−14.14	90.08	59.89	Kern	
	IX	26.460	140.54	705	−13.22	335.79	60.02	Kleiner Fl.	
19.	IX	26.460	136.67	823	−14.24	320.74	44.97	Kl. Fl.	
		27.476	142.69	681	−13.77	339.49	49.22	Hof	

Nr.	1884		p	ρ	b	l	L		
	IX	27.476	143°.04	678″	−13°.92	339°.72	49°.45	Westl. K.	
		»	142.39	684	−13.71	339.07	48.80	Oestl. „	
		28.463	153.90	518	−13.57	355.10	50.75	Hof	
		»	154.04	520	−13.69	355.07	50.72	Kern	
		29.483	178.09	372	−13.62	11.30	52.40	Hof	
		»	178.52	370	−13.11	11.77	52.87	Kern	Beh. Fl.
		30.469	217.77	335	−13.48	27.15	54.19	Hof	
		»	217.77	335	−13.48	27.15	54.19	Kern	
	X	2.470	264.01	585	−13.51	56.95	55.44	Hof	
		»	264.04	585	−13.48	56.93	55.42	Kern	
		4.480	277.65	844	−13.01	85.54	55.35	Hof	
		»	277.65	844	−13.01	85.54	55.35	Kern	
	IX	30.469	209.77	326	−13.33	24.27	51.31	Gruppe	
	X	2.470	260.41	537	−13.42	52.72	51.21	Kl. Fl.	
	IX	29.483	174.63	402	−14.63	9.03	50.13	„	
		30.469	207.42	340	−14.26	23.47	50.51	Gruppe	
	IX	29.483	171.61	401	−13.83	8.02	49.12	Kleiner Fl.	Vgl. R 321.13
	X	2.470	258.83	520	−13.42	51.17	49.66		
	IX	28.463	148.90	556	−12.77	351.16	46.81	Kleiner Fl.	
		29.483	165.37	412	−12.85	5.47	46.57	Thlwse beh.Fl.	
		30.469	194.29	323	−12.77	18.96	46.00	Kleiner Fl.	
		29.483	167.80	438	−14.82	4.98	46.08		
		30.469	195.61	347	−14.37	19.11	46 15	„	
	X	2.470	253.94	488	−14.09	47.75	46.24		
	IX	29.483	170.66	428	−15.09	6.56	47.66	„	
		26.460	137.73	826	−15.22	320.53	44.76	„	
		27.476	139.92	715	−13.06	335.84	45.57		
		28.463	148.02	570	−12.86	350.00	45.65	„	
		27.476	142.65	739	−15.79	334.53	44.26	Kl. Fl.	
		28.463	150.58	603	−15.47	348.66	44.31	„ m. Hfthln.	
		29.483	164.00	466	−15.07	2.39	43.49	Kleiner Fl.	
	X	2.470	247.72	462	−15.05	44.20	42.69	Gruppe	
	IX	26.460	134.27	843	−12.90	317.80	42.03	Kleiner Fl.	
		»	137.11	848	−15.49	317.43	41.66		
		27.476	140.95	742	−14.71	333.76	43.49	„	
	X	2.470	251.16	465	−14.04	45.58	44.07	„	
20.	IX	27.476	134.02	900	−14.63	312.88	22.61		
		28.463	137.72	800	−14.22	328.12	23.77		
		29.483	144.27	659	−13.97	343.54	24.64		Bis IX 30
		30.469	155.52	503	−13.61	358.48	25.52		kl. Fl.,
	X	2.470	216.31	315	−12.47	28.35	26.84	Hof	nachher
		»	216.41	316	−12.51	28.39	26.88	Kern	beh. Fl.
		4.480	265.45	572	−12.41	58.45	28.26	Hof	Vgl.
		»	265.42	573	−12.45	58.52	28.33	Kern	R 321.15

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L	
	IX	29.483	144°.18	685″	-14°.83	341°.49	22°.59	Kl. Fl.
		30.469	155.39	518	-14.21	357.55	24.59	„
	X	2.470	211.32	333	-13.79	26.80	25.29	Gruppe
	IX	28.463	138.61	832	-16.05	324.78	20.43	Kleiner Fl.
		30.469	154.96	589	-17.10	353.11	20.15	„
		»	153.43	595	-16.60	352.16	19.20	„
	X	2.470	204.17	358	-15.50	24.19	22.68	Fleck mit Hoftheilen
		»	200.05	354	-15.11	22.65	21.14	Kleiner Fl.
		»	195.71	374	-16.12	20.77	19.26	„
		»	191.82	386	-16.55	19.03	17.52	Gruppe
		4.480	263.67	539	-12.06	55.77	25.58	Kleiner Fl.
		»	256.03	518	-14.69	52.08	21.89	Gruppe
		»	247.08	453	-14.95	45.53	15.34	„
	IX	28.463	137.92	844	-15.93	322.98	18.63	Kl. Fl.
		29.483	142.62	741	-15.80	336.30	17.40	„ m. Hfthln.
		30.469	150.96	616	-16.19	349.84	16.88	Gruppe

Rotationsperiode 321.

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L		
1.	IX	30.469	130.09	768	- 7.25	331.63	358.67	Kleiner Fl.	
	X	2.470	146.43	437	- 7.44	1.70	0.19	„	
		»	145.21	466	- 7.88	359.68	358.17	Gruppe	
		»	142.63	485	- 7.38	357.93	356.42	Mittelgrosser Fl.	
		»	142.13	495	- 7.14	357.15	355.64	„	
2.	X	4.480	12.46	27	7.79	27.33	357.14	Gruppe	
	IX	30.469	109.99	797	8.54	326.44	353.48	Kleiner Fl.	
	X	2.470	107.67	494	9.74	353.99	352.48		
		4.480	74.51	113	10.67	21.61	351.42		
3.	X	4.480	141.24	641	-11.51	348.99	318.80	„	
4.	X	2.470	103.25	933	13.92	307.56	306.05	Hof	Beh. Fl. Vgl. R 320.6
		»	103.29	931	13.92	308.13	306.62	Westl. K.	
		»	102.96	934	14.18	307.10	305.59	Oestl. „	
		4.480	102.93	744	14.16	336.07	305.88	Hof	
		»	102.85	745	14.24	335.98	305.79	M.d.bd.K.	
		12.467	309.71	765	14.18	87.61	303.48	Hof	
		»	109.81	765	14.26	87.62	303.49	Kern	
		4.480	103.38	776	13.98	332.75	302.56	Kleiner Fl.	
		12.467	308.67	743	13.29	85.39	301.26	„	
		2.470	103.98	956	12.56	298.77	297.26	Behofter Fl.	
		4.480	104.90	826	12.85	327.19	297.00	Hof	
		»	105.25	820	12.54	327.96	297.77	Westl. Kern	
		»	104.46	835	13.24	326.08	295.89	Oestl. „	

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L	
	X	4.480	102°.59	844″	14°.88	324°.98	294°.79	Behofter Fl.
		12.467	308.52	709	12.95	82.29	298.16	Kleiner Fleck
		»	307.76	686	11.24	80.32	296.19	Fleck mit Hoftheilen
		»	309.89	689	13.76	80.47	296.34	"
		»	308.17	673	12.42	79.16	295.03	"
		»	310.99	681	14.46	79.66	295.53	"
		»	309.66	668.	13.43	78.64	294.51	"
5.	X	19.459	281.69	831	− 9.41	99.50	215.61	Kleiner Fl.
6.	X	12.467	101.30	619	13.93	355.17	211.04	"
		»	103.02	623	12.88	354.71	210.58	"
7.	X	19.459	61.16	272	18.38	31.97	148.08	"
		21.480	345.73	374	22.06	59.34	146.62	"
8.	X	19.459	158.12	355	− 9.27	25.85	141.96	Kl.Fl.m. Hofsp. (Vgl. R 320.14?)
		21.480	244.02	296	− 8.89	54.79	142.07	
		19.459	160.55	379	−10.97	25.34	141.45	Kleiner Fl.
		19.459	154.45	380	− 9.24	23.69	139.80	Kl.Fl.m. Hofsp.
		21.480	240.02	289	− 9.33	53.63	140.91	
		19.459	148.18	478	−10.62	16.65	132.76	"
		21.480	212.47	267	−10.85	45.71	132.99	
		19.459	145.96	466	− 9.25	16.85	132.96	"
		21.480	213.49	241	− 9.25	45.78	133.06	
9.	X	21.480	242.69	180	− 3.54	50.26	137.54	Gruppe
		25.438	287.57	831	− 4.18	106.31	137.13	Kl. Fl.
10.	X	21.480	186.80	246	− 8.87	39.05	126.33	Fleck mit Hoftheilen
		25.438	280.17	755	− 8.71	97.37	128.19	
		21.480	184.47	245	− 8.60	38.51	125.79	"
		25.438	279.33	741	− 9.01	95.91	126.73	
		21.480	171.34	269	− 8.29	34.70	121.98	2 Fl. m. Hofthln. (Vgl. R 322.11?)
		»	170.78	281	− 8.79	34.15	121.43	
		25.438	278.85	692	− 8.28	91.60	122.42	Beh. Fl.
11.	X	25.438	237.18	494	−21.16	64.58	95.40	Beh. Kerngruppe
		»	233.33	453	−19.78	61.28	92.10	Behofter Fl.
12.	X	25.438	168.48	468	−18.27	30.06	60.88	Kleiner Fl.
		21.480	133.39	932	−15.65	330.97	58.25	Beh. Fl. (Vgl. R 320.18)
		25.438	159.52	459	−14.92	27.21	58.03	
		21.480	130.46	941	−13.16	328.40	55.68	"
		25.438	153.66	467	−13.08	24.96	55.78	

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L	
13.	X	25.438	145°.59	559″	-12°.90	17°.03	47°.85	Hof
		»	145.73	560	-12.99	17.04	47.86	Kern
		»	144.88	582	-13.30	15.34	46.16	Kleiner Fl. Vgl.
		»	145.35	606	-14.39	13.79	44.61	„ R 320.19
		»	146.15	672	-17.35	15.14	45.96	Kleiner beh. Fl.
		»	145.33	692	-17.41	7.39	38.21	Fl. m. östlichen Hofe
		»	143.82	676	-15.89	8.15	38.97	„
		»	142.88	703	-16.22	5.68	36.50	Kleiner Fl.
	X	2.490	280.14	949	-12.78	133.20	49.14	„
		»	279.32	940	-13.25	130.38	46.32	Beh. Fl. m. 2 Kernen
		»	278.97	929	-13.26	128.00	43.94	Behofter Fl.
		»	276.23	902	-15.00	122.29	38.23	Kl. Fl. m. Hoftheilen
		»	276.03	894	-14.96	121.09	37.03	„
14.	X	25.438	129.28	714	- 7.04	1.66	32.48	Kleiner Fl.
	XI	2.490	285.45	851	- 5.61	116.46	32.40	„
15.	X	25.438	136.39	789	-14.19	356.13	26.95	„ Vgl. R 320.20
					Rotationsperiode 322.			
1.	XI	2.490	269.06	487	- 8.74	83.21	359.15	Kleiner Fl.
2.	XI	2.490	358.47	122	10.40	58.96	334.90	Hof (Beh. Fl.)
		»	358.13	122	10.41	59.00	334.94	Kern
		3.469	319.01	290	10.98	72.70	334.67	Hof
		»	319.09	290	11.02	72.78	334.75	Kern
		4.454	309.48	484	11.08	86.94	334.86	Hof
		»	309.40	483	11.03	86.97	334.89	Kern
		5.565	306.04	680	11.40	103.06	335.13	Hof
		»	306.04	679	11.39	103.01	335.08	Kern
		6.582	304.90	823	11.77	117.91	334.99	Hof
		»	304.78	822	11.66	117.74	334.84	Kern
		7.573	304.44	917	11.95	132.26	335.69	„
		3.469	319.07	265	10.39	71.32	333.29	Kleiner Fl.
		4.454	308.18	459	10.11	85.44	333.36	
3.	XI	3.469	74.26	308	15.38	42.10	304.07	„
4.	XI	2.490	102.75	551	9.62	21.44	297.38	Sporad. kleiner Fl.
5.	XI	13.576	276.90	655	- 7.71	107.99	225.77	Behofter Fl.
		14.483	279.68	787	- 7.74	120.91	225.75	
		13.576	276.81	631	- 7.35	106.12	223.90	Kl. Fl. m. Hofspuren
		14.483	279.73	764	- 7.35	118.73	223.57	

Nr.	1884		p	ϱ	b	l	L	
	XI	13.576	274°.99	609″	− 8°.08	104°.20	221°.98	Kleiner Fl.
		»	272.40	587	− 9.13	102.13	219.91	Kleiner beh. Fl.,
		14.483	276.92	713	− 8.61	113.69	218.53	
		13.576	276.08	577	− 6.84	102.04	219.82	Kl. Fl. m. Hofspuren
		14.483	280.14	723	− 6.44	115.00	219.84	
		13.576	274.13	568	− 7.78	101.12	218.90	Behofter Fl.
		14.483	278.77	707	− 7.18	113.46	218.30	
6.	XI	13.576	282.66	434	− 1.46	93.02	210.80	Kleiner Fl.
		14.483	291.59	659	2.18	110.45	215.29	„
7.	XI	14.483	317.13	504	15.39	96.71	201.55	Sporad. kl. Fl.
8.	XI	13.576	90.59	114	5.11	60.64	178.42	Kl. beh. Fl.
		14.483	314.64	107	5.14	73.61	178.45	Kleiner Fl.
		13.576	110.40	179	2.89	56.49	174.27	„
9.	XI	13.576	120.76	603	− 3.57	29.13	146.91	„
		14.483	133.33	409	− 6.66	44.65	149.49	„
10.	XI	13.576	87.85	676	18.21	24.87	142.65	„
		14.483	80.53	525	18.28	38.61	143.45	
		»	82.48	579	18.84	34.38	139.22	„
11.	XI	13.576	123.17	789	− 7.83	13.54	131.32	„ Vgl. R 321.10?
		14.483	125.69	657	− 7.72	26.54	131.38	
		13.576	124.19	799	− 8.80	12.68	130.46	„
		14.483	126.67	665	− 8.45	26.03	130.87	
12.	XI	13.576	103.86	836	7.96	7.56	125.34	Kl. Fl. m. Hofspuren
		14.483	102.19	715	8.45	20.66	125.50	

Zum Schlusse lasse ich noch eine Fortsetzung meiner Sonnenfleckenliteratur folgen:

522) Rudolf Wolf, Beobachtungen der Sonnenflecken auf der Sternwarte in Zürich im Jahre 1885. (Fortsetzung zu 505.)

1885			1885			1885			1885			1885		
I	5	1.—	I	9	0.0	I	12	0.0	I	16	1.2	I	28	5.8
–	6	3.6	–	10	0.0	–	13	0.0	–	17	1.2	–	29	4.6
–	8	0.0	–	11	0.0	–	14	1.2	–	27	5.8	–	30	4.6

1885			1885			1885			1885			1885		
I	31	3.4	IV	1	2.8	V	22	5.10	VII	10	3.8	VIII	25	2.6
II	1	4.6	–	2	3.12	–	23	5.8	–	11	3.4	–	26	1.4
–	2	3.4	–	3	3.8	–	24	6.12	–	12	3.6	–	27	3.6
–	3	3.8	–	4	3.8	–	25	6.12	–	13	3.6	–	28	4.6
–	4	3.12	–	5	3.12	–	26	5.10	–	14	3.8	–	30	3.8
–	5	4.16	–	6	3.10	–	27	6.12	–	15	5.14	–	31	3.12
–	6	3.12	–	7	3.14	–	28	5.9	–	16	4.8	IX	1	3.12
–	7	5.14	–	8	3.16	–	29	5.8	–	17	3.10	–	2	4.10
–	8	5.22	–	9	3.16	–	30	5.6	–	18	4.12	–	3	5.10
–	10	3.10	–	10	2.20	–	31	4.8	–	19	4.10	–	4	4.8
–	11	4.12	–	11	2.18	VI	1	4.12	–	20	3.12	–	5	4.10
–	12	3.10	–	14	2.12	–	2	4.12	–	21	3.10	–	6	4.6
–	13	4.10	–	15	2.6	–	3	4.18	–	22	3.12	–	7	3.5
–	15	5.14	–	16	2.3	–	4	4.20	–	23	3.8	–	8	3.3
–	16	4.10	–	17	2.4	–	5	4.18	–	24	5.8	–	9	3.4
–	19	6.16	–	18	2.4	–	6	3.16	–	25	3.6	–	10	2.4
–	20	5.10	–	19	1.2	–	7	4.16	–	26	2.6	–	11	1.2
–	23	4.8	–	20	2.3	–	8	4.14	–	27	2.6	–	13	1.2
–	24	2.6	–	21	2.3	–	9	3.12	–	28	4.8	–	14	1.4
–	25	2.6	–	22	4.8	–	10	3.12	–	29	3.6	–	15	1.2
–	26	2.4	–	23	4.8	–	12	4.12	–	30	2.5	–	16	1.2
–	27	1.2	–	24	4.6	–	13	4.8	–	31	2.4	–	17	2.5
–	28	2.4	–	25	3.4	–	14	3.8	VIII	1	2.6	–	18	2.4
III	2	3.18	–	26	3.4	–	15	4.8	–	2	2.6	–	19	1.2
–	3	4.20	–	27	2.3	–	16	5.12	–	3	1.3	–	20	0.0
–	4	4.22	–	28	5.10	–	17	6.18	–	4	1.2	–	21	0.0
–	6	4.22	–	29	5.8	–	18	6.16	–	5	2.3	–	22	3.5
–	8	3.14	V	1	4.6	–	19	4.18	–	6	3.4	–	23	2.2
–	9	3.10	–	2	5.8	–	20	4.18	–	7	3.6	–	24	2.2
–	11	2.4	–	3	3.6	–	21	4.18	–	8	2.6	–	26	3.4
–	12	3.6	–	4	4.8	–	22	3.20	–	9	4.14	–	27	4.6
–	13	3.6	–	5	4.8	–	23	5.24	–	10	4.10	–	29	4.5
–	14	3.6	–	6	4.8	–	24	5.16	–	11	4.10	–	30	3.3
–	15	3.4	–	7	6.12	–	25	4.14	–	12	4.10	X	1	4.5
–	16	3.5	–	8	6.12	–	26	3.14	–	13	4.10	–	2	4.5
–	17	2.6	–	9	6.12	–	27	3.12	–	14	4.8	–	3	3.4
–	18	1.3	–	10	6.10	–	28	3.10	–	15	3.6	–	4	3.4
–	19	1.2	–	11	5.10	–	29	4.16	–	16	3.6	–	5	2.5
–	20	1.1	–	12	5.10	–	30	5.16	–	17	2.3	–	6	3.5
–	21	1.1	–	14	2.2	VII	2	4.12	–	18	2.3	–	7	3.4
–	23	0.0	–	16	2.2	–	3	3.10	–	19	3.4	–	8	3.8
–	24	1.1	–	17	2.4	–	4	2.12	–	20	3.4	–	9	2.3
–	27	1.—	–	18	3.6	–	5	4.16	–	21	1.1	–	10	2.3
–	29	2.6	–	19	3.10	–	7	3.10	–	22	1.1	–	11	2.3
–	30	2.8	–	20	4.8	–	8	3.10	–	23	2.2	–	14	0.0
–	31	2.8	–	21	5.9	–	9	4.10	–	24	2.5	–	15	0.0

1885			1885			1885			1885			1885		
X	16	0.0	X	28	4.8	XI	22	1.2	XII	3	0.0	XII	17	1.2
–	17	0.0	–	30	4.6	–	23	1.1	–	4	0.0	–	23	1.2
–	18	1.4	XI	1	3.4	–	24	1.1	–	6	0.0	–	24	2.3
–	19	2.6	–	2	2.2	–	25	0.0	–	9	0.0	–	26	2.3
–	21	2.6	–	3	2.2	–	26	0.0	–	10	0.0	–	27	3.6
–	22	2.6	–	12	2.3	–	27	0.0	–	11	1.1	–	28	3.4
–	23	3.10	–	14	2.3	–	28	0.—	–	12	1.1	–	31	2.6
–	26	4.8	–	16	3.6	–	30	0.—	–	15	1.3			
–	27	4.8	–	19	3.8	XII	2	0.0	–	16	1.3			

523) Alfred Wolfer, Beobachtungen der Sonnenflecken auf der Sternwarte in Zürich im Jahre 1885. (Fortsetzung zu 506.)

1885			1885			1885			1885			1885		
I	5	4.37	II	23	6.44	IV	4	4.41	V	17	4.28	VI	19	7.119
–	6	4.37	–	24	6.51	–	5	3.50	–	18	4.31	–	20	6.135
–	8	3.7	–	25	6.37	–	6	4.67	–	19	4.34	–	21	5.73
–	9	2.4	–	26	5.12	–	8	4.99	–	20	5.65	–	22	4.91
–	10	1.2	–	27	5.24	–	9	4.112	–	21	6.—	–	23	6.119
–	12	2.13	III	2	6.117	–	10	5.139	–	22	7.60	–	24	7.119
–	13	2.15	–	3	6.114	–	11	5.126	–	23	6.78	–	25	5.93
–	14	2.7	–	4	5.137	–	14	3.80	–	24	9.106	–	26	4.103
–	16	4.15	–	8	5.76	–	15	4.48	–	25	9.138	–	27	4.105
–	17	3.12	–	9	4.43	–	16	2.27	–	27	9.84	–	28	5.75
–	26	4.23	–	11	6.37	–	17	2.16	–	28	9.57	–	29	5.101
–	27	6.72	–	12	5.20	–	18	2.14	–	29	9.45	–	30	9.141
–	28	7.51	–	13	6.35	–	19	3.16	–	30	9.38	VII	2	6.125
–	29	8.72	–	14	6.33	–	20	4.20	–	31	6.45	–	3	6.134
–	30	8.43	–	15	4.35	–	21	6.29	VI	1	7.59	–	4	6.123
–	31	7.30	–	16	4.28	–	22	6.47	–	2	5.82	–	5	5.71
II	1	6.33	–	17	5.37	–	23	4.30	–	3	6.93	–	7	5.66
–	2	5.22	–	18	4.26	–	24	5.28	–	4	7.109	–	8	5.53
–	4	5.113	–	19	5.24	–	25	4.25	–	5	5.106	–	9	6.61
–	5	4.113	–	20	5.14	–	26	3.5	–	6	6.102	–	10	4.42
–	6	5.108	–	21	3.6	–	27	6.42	–	7	6.96	–	11	8.54
–	7	5.84	–	23	0.0	V	2	7.69	–	8	6.88	–	12	8.46
–	8	7.121	–	24	1.6	–	4	5.50	–	9	5.85	–	13	6.54
–	9	4.—	–	27	3.51	–	5	6.59	–	10	5.61	–	14	7.72
–	10	5.71	–	29	4.70	–	7	7.93	–	12	7.64	–	15	6.93
–	13	7.98	–	30	4.80	–	9	8.123	–	13	7.55	–	16	6.71
–	14	6.79	–	31	3.61	–	10	6.67	–	14	9.68	–	17	6.88
–	15	8.80	IV	1	2.52	–	11	6.41	–	15	11.88	–	18	7.107
–	19	8.79	–	2	4.62	–	12	5.34	–	16	10.124	–	19	6.83
–	20	9.24	–	3	4.48	–	16	4.24	–	17	10.119	–	20	6.67

1885			1885			1885			1885			1885		
VII	21	6.72	VIII	11	6.74	IX	12	2.24	X	7	4.21	XI	22	2.21
–	22	5.71	–	12	5.66	–	13	2.32	–	8	4.39	–	23	2.6
–	23	4.58	–	13	6.67	–	14	3.45	–	11	4.22	–	24	1.2
–	24	6.41	–	14	6.35	–	15	3.18	–	14	0.0	–	26	2.7
–	25	5.39	–	15	7.45	–	16	2.15	–	15	0.0	–	27	0.0
–	26	7.51	–	16	7.50	–	17	2.17	–	16	0.0	XII	2	1.12
–	27	6.57	–	26	3.44	–	18	2.21	–	17	2.8	–	3	1.4
–	28	6.50	–	27	4.57	–	19	3.26	–	18	3.23	–	4	1.2
–	29	5.49	–	28	5.71	–	20	3.12	–	19	3.43	–	5	0.0
–	30	4.32	–	30	4.63	–	21	3.10	–	21	3.47	–	9	2.11
–	31	4.33	–	31	3.65	–	22	3.16	–	22	2.35	–	11	2.10
VIII	1	5.34	IX	2	4.62	–	23	4.13	–	23	3.58	–	12	3.4
–	2	3.29	–	3	4.66	–	24	5.15	–	24	3.32	–	15	1.2
–	3	4.22	–	4	5.37	–	29	5.20	–	26	4.57	–	16	2.15
–	4	3.25	–	5	4.46	–	30	5.10	–	27	4.34	–	23	6.36
–	5	4.25	–	6	4.22	X	1	4.9	–	30	4.49	–	24	4.18
–	6	4.17	–	7	3.20	–	2	4.28	XI	1	4.19	–	27	3.25
–	7	6.58	–	8	4.21	–	3	4.18	–	2	3.10	–	31	3.26
–	8	8.67	–	9	3.18	–	4	4.27	–	12	4.25			
–	9	7.99	–	10	2.24	–	5	4.20	–	14	5.43			
–	10	6.99	–	11	2.13	–	6	3.17	–	19	4.74			

524) Beobachtungen der Sonnenflecken in Laibach durch Herrn Ferdinand Janesch, k. k. Landesgerichts-Official. Schriftliche Mittheilung. (Fortsetzung zu 507.)

Herr Janesch hat im Jahre 1885 folgende Bestimmungen erhalten:

1885			1885			1885			1885			1885		
I	8	0.0	II	12	6.22	III	11	4.9	IV	10	2.51	IV	30	3.10
–	9	0.0	–	13	3.10	–	14	4.8	–	11	2.46	V	1	6.10
–	10	0.0	–	14	5.15	–	15	3.8	–	14	4.21	–	2	8.13
–	19	2.24	–	15	8.27	–	16	3.8	–	15	3.10	–	6	9.21
–	20	5.17	–	16	9.19	–	17	2.6	–	16	2.5	–	8	7.51
–	23	7.16	–	23	1 2	–	18	1.4	–	19	5.5	–	10	7.15
–	26	8.14	–	24	2.9	–	19	1.3	–	20	4.4	–	11	6.15
–	28	6.12	–	25	2.7	–	20	1.1	–	21	4.6	–	16	1.1
–	29	3.6	–	26	1.1	–	21	0.0	–	22	6.16	–	17	2.7
–	30	3.9	–	28	7.13	–	22	0.0	–	23	5.9	–	18	5.13
II	1	3.8	III	1	9.19	–	23	0.0	–	24	7.10	–	20	5.15
–	2	4.6	–	2	6.32	–	29	4.11	–	25	4.7	–	21	8.17
–	4	3.24	–	7	10.26	–	30	5.7	–	26	4.7	–	22	8.17
–	9	10.49	–	8	8 19	–	31	7.8	–	27	7.16	–	23	6.17
–	10	4.20	–	9	5.11	IV	3	4.10	–	28	8.18	–	24	8.16
–	11	3.18	–	10	3.8	–	4	6.21	–	29	10.23	–	25	6.15

1885			1885			1885			1885			1885		
V	26	13.29	VI	27	3.29	VII	30	4.9	IX	10	2.5	X	16	0.0
–	27	11.26	–	28	10.19	–	31	4.9	–	12	1.6	–	17	3.4
–	28	8.13	–	30	7.27	VIII	1	3.6	–	13	1.6	–	18	5.9
–	29	5.10	VII	1	7.36	–	3	3.5	–	14	1.8	–	19	6.8
–	30	6.8	–	2	5.25	–	4	1.3	–	16	1.3	–	22	6.19
–	31	4.8	–	3	5.26	–	6	5.7	–	17	1.2	–	23	8.22
VI	2	8.18	–	4	8.25	–	7	5.11	–	18	1.2	–	24	7.12
–	3	10.27	–	7	5.17	–	8	4.10	–	19	2.4	–	26	6.8
–	4	8.27	–	8	5.16	–	9	7.19	–	20	0.0	–	30	7.17
–	5	6.36	–	9	4.13	–	10	5.8	–	21	1.1	–	31	5.8
–	6	10.26	–	10	6.16	–	11	9.18	–	22	3.5	XI	11	3.9
–	7	11.30	–	11	5.9	–	12	11.24	–	23	2.3	–	12	3.5
–	8	11.32	–	12	6.10	–	13	9.16	–	24	2.3	–	14	3.5
–	9	7.29	–	13	8.17	–	14	6.11	–	25	3.4	–	15	6.11
–	10	6.24	–	14	5.15	–	15	5.9	–	27	3.4	–	24	1.1
–	13	5.17	–	15	7.18	–	16	4.7	–	28	3.4	–	28	0.0
–	14	3.11	–	17	7.21	–	17	4.5	–	29	3.5	–	30	0.0
–	15	6.13	–	18	9.22	–	20	3.4	–	30	3.5	XII	1	0.0
–	16	11.34	–	19	8.25	–	24	6.9	X	1	5.7	–	2	0.0
–	17	14.67	–	20	9.18	–	25	7.15	–	3	1.2	–	3	1.1
–	18	8.47	–	22	5.20	–	28	9.19	–	4	5.6	–	12	1.2
–	20	7.52	–	23	8.21	IX	2	7.30	–	5	5.7	–	13	1.3
–	22	5.32	–	24	6.17	–	4	4.9	–	6	5.7	–	16	2.3
–	24	7.29	–	25	4.11	–	5	5.11	–	7	4.7	–	20	2.4
–	25	6.27	–	26	3.7	–	6	4.8	–	11	2.2	–	28	4.8
–	26	4.30	–	27	4.8	–	7	5.9	–	15	0.0	–	29	3.19

525) Sonnenflecken-Beobachtungen von Herrn W. Winkler in Gohlis (Bismarkstrasse 17) bei Leipzig. Nach schriftlicher Mittheilung. (Fortsetzung zu 509.)

Herr Winkler hat folgende weitere Zählungen erhalten:

1885			1885			1885			1885			1885		
I	7	4.10	I	26	7.43	II	14	8.67?	III	5	4.100?	III	30	1.32
–	8	3.6	–	27	6.61	–	15	8.79	–	7	5.99	–	31	1.30
–	9	1.1	–	30	5.17	–	16	7.63	–	8	5.67	IV	3	3.19
–	11	2.5	II	1	4.18	–	19	7.50	–	9	4.49	–	4	3.27
–	15	3.10	–	2	4.27	–	22	6.37	–	10	5.31	–	5	3.37
–	18	2.25	–	5	4.39	–	23	6.42	–	11	5.21	–	6	4.37
–	19	3.44	–	6	5.32	–	24	4.27	–	13	5.14	–	7	3.40
–	21	4.62	–	7	5.52	–	25	4.26	–	17	1.17	–	8	3.—
–	22	6.83	–	9	6.65	–	27	2.19	–	18	1.22	–	13	2.26
–	23	6.51	–	12	4.38	–	28	3.48	–	22	0.0	–	16	2.12
–	25	6.45	–	13	5.68	III	2	5.67	–	27	3.27	–	17	2.13

1885			1885			1885			1885			1885		
IV	18	2.10	V	18	4.13	VI	24	6.62	IX	3	5.34	XI	10	4.21
-	19	1.8	-	19	4.20	-	26	3.64	-	5	7.32	-	11	3.26
-	20	2.9	-	20	5.22	-	29	3.57	-	6	4.16	-	16	3.27
-	21	2.12	-	22	6.33	-	30	3.62	-	10	2.14	-	17	4.36
-	22	5.29	-	24	8.63	VII	1	2.66	-	11	2.18	-	18	4.34
-	23	3.22	-	25	9.52	-	4	2.33	-	14	2.21	-	19	3.20
-	24	4.21	-	28	5.22	-	5	2.45	-	15	1.10	-	20	3.29
-	25	4.18	-	29	5.16	-	6	3.47	-	16	2.11	-	21	1.2
-	26	4.10	-	30	6.18	-	7	3.40	-	17	2.18	-	23	1.2
-	27	5.19	-	31	5.13	-	8	3.27	-	18	2.19	XII	2	1.9
-	28	5.37	VI	1	6.44	-	9	3.27	-	21	1.2	-	3	1.4
-	29	5.30	-	2	5.46	-	10	3.17	-	22	2.9	-	5	0.0
-	30	6.38	-	3	4.51	-	12	4.24	-	23	1.3	-	7	0.0
V	3	4.22	-	5	3.36	-	13	4.27	X	2	4.13	-	10	1.1
-	4	4.16	-	6	3.41	-	16	5.23	-	6	3.23	-	12	2.3
-	5	5.41	-	7	5.48	-	17	5.38	-	8	3.42	-	19	3.9
-	6	6.60	-	8	4.47	-	18	5.49	-	10	3.16	-	20	6.8
-	7	6.63	-	9	2.33	-	19	5.43	-	11	3.9	-	21	6.8
-	8	6.56	-	10	2.25	-	20	5.30	-	14	1.2	-	25	3.16
-	9	6.54	-	11	3.20	-	23	3.27	-	21	3.40	-	28	3.10
-	10	6.37	-	12	4.32	-	24	3.13	-	22	3.32	-	29	3.12
-	11	6.—	-	13	4.37	-	26	2.16	-	23	3.36	-	30	2.27
-	12	4.15	-	14	7.37	-	28	4.28	-	26	4.42	-	31	3.17
-	14	3.7	-	19	4.55	-	29	4.26	-	28	5.56			
-	15	2.2	-	21	4.69	-	31	3.24*)	-	31	4.26			
-	16	4.10	-	22	4.51	IX	1	5.37	XI	3	2.3			
-	17	2.14	-	23	6.72	-	2	5.40	-	4	2.3			

526) Beobachtungen der magnetischen Declinations-Variationen zu Montsouris bei Paris im Jahre 1885 (Forts. zu 518).

Herr Marié Davy hat mir, auf meine Bitte hin, unter dem 23. Januar 1886 folgende Bestimmungen, welche wie in frühern Jahren die „Ecarts sur la moyenne diurne mensuelle“ geben, zukommen lassen, welchen ich noch zwei Variations-Columnen beigefügt habe, deren Erste die Differenz zwischen Maximum und Minimum gibt, während die Zweite ihre Zunahme gegen den entsprechenden Monat von 1884 enthält:

*) Im August fielen die Beobachtungen aus.

1885	21ʰ	0ʰ	3ʰ	6ʰ	Variationen 1885	Zunahme gegen 1884
I	-1′,7	3′,1	2′,0	0′,3	4′,8	-0′,7
II	-2 ,1	4 ,5	2 ,7	0 ,6	6 ,6	-2 ,3
III	-4 ,7	4 ,9	5 ,1	0 ,6	9 ,8	-1 ,9
IV	-3 ,5	6 ,8	5 ,5	1 ,4	10 ,3	-1 ,9
V	-2 ,2	6 ,4	5 ,1	0 ,4	8 ,6	-1 ,5
VI	-3 ,1	6 ,5	6 ,2	1 ,4	9 ,6	-1 ,0
VII	-2 ,8	6 ,1	5 ,9	1 ,0	8 ,9	0 ,1
VIII	-1 ,5	7 ,2	5 ,1	0 ,5	8 ,7	0 ,2
IX	-2 ,5	6 ,0	4 ,0	-0 ,2	8 ,5	-1 ,6
X	-3 ,2	4 ,2	4 ,3	0 ,8	7 ,5	-2 ,7
XI	-2 ,0	4 ,0	3 ,1	0 ,0	6 ,0	-1 ,2
XII	-1 ,2	2 ,3	1 ,6	-0 ,4	3 ,5	-1 ,2
				Moyenne	7′,73	-1′,31

527) Beobachtungen der Sonnenflecken in Moncalieri. Nach schriftlicher Mittheilung von dem Director P. Denza. (Fortsetzung zu 511.)

Es wurden folgende Zählungen erhalten:

1885			1885			1885			1885			1885		
I	1	2.5	II	7	2.21	III	15	3.13	V	5	4.18	V	31	5.20
–	5	4.17	–	8	2.27	–	16	3.11	–	8	7.41	VI	1	4.21
–	6	3.15	–	9	3.28	–	17	3.14	–	9	7.39	–	2	4.29
–	7	3.13	–	10	3.20	–	20	1.2	–	11	5.21	–	3	4.34
–	8	3.9	–	11	4.29	–	22	0.0	–	12	4.21	–	4	4.35
–	9	2.6	–	12	4.23	–	31	1.16	–	16	4.10	–	5	5.58
–	10	2.5	–	15	3.24	IV	1	2.13	–	18	3.9	–	6	5.35
–	20	4.23	–	22	6.21	–	9	3.47	–	19	3.14	–	7	5.21
–	21	4.30	–	25	2.9	–	13	2.25	–	20	3.16	–	9	2.24
–	22	4.31	–	26	3.14	–	20	2.5	–	22	5.12	–	11	3.33
–	23	4.29	–	27	3.15	–	21	2.8	–	24	7.30	–	13	4.38
–	26	6.29	–	28	2.13	–	23	3.17	–	25	7.49	–	14	3.31
–	27	6.24	III	7	5.35	–	24	3.10	–	26	6.39	–	19	4.50
–	28	5.23	–	10	3.13	V	1	6.22	–	27	7.52	–	20	4.55
–	29	3.19	–	13	3.10	–	2	5.21	–	28	7.47	–	21	4.65
II	6	3.21	–	14	3.13	–	4	4.14	–	30	5.15	–	22	4.44

1885			1885			1885			1885			1885		
VI	23	4.45	VII	25	3.15	IX	2	4.23	X	2	4.11	XI	27	0.0
-	24	2.35	-	26	3.18	-	5	4.19	-	3	3.12	-	29	0.0
-	25	2.25	-	27	3.20	-	9	3.7	-	4	3.11	-	30	0.0
-	27	2.37	-	28	3.16	-	10	2.9	-	5	3.13	XII	10	1.3
-	28	1.32	-	29	3.25	-	11	2.7	-	7	3.18	-	11	3.5
VII	1	2.41	-	30	2.19	-	12	1.8	-	8	3.19	-	12	3.7
-	2	2.34	VIII	2	2.17	-	13	1.7	-	11	3.14	-	15	1.6
-	10	2.23	-	4	2.16	-	14	1.5	-	12	1.7	-	16	1.7
-	11	3.20	-	5	3.18	-	15	1.6	-	17	1.4	-	18	1.4
-	12	3.13	-	7	3 23	-	16	2.9	-	20	1.9	-	19	1.5
-	13	3.19	-	8	3.19	-	17	2.13	-	21	2.13	-	20	1.6
-	14	4.28	-	9	4.54	-	18	2.14	-	26	4.23	-	22	2.10
-	15	5.29	-	10	4.34	-	19	1.9	-	27	4.24	-	25	3.5
-	16	4.18	-	12	5.30	-	20	1.8	-	28	5.23	-	28	3.11
-	17	4.20	-	15	3.22	-	21	2.7	-	29	4.20	-	31	3.12
-	20	4.30	-	17	3.11	-	22	2.5	XI	2	2.7			
-	21	3.28	-	18	3.8	-	23	3.7	-	5	2.11			
-	22	3.30	-	22	2.6	-	28	4.14	-	23	1.3			
-	24	4.34	-	23	3.9	-	29	4.14	-	26	0.0			

528) Aus einer Mittheilung von Hrn. Prof. Fearnley, datirt: Christiania den 16. Januar 1886. (Fortsetzung zu 512.)

Nachdem Herr Prof. Fearnley die 1885 in Christiania erhaltenen magnetischen Bestimmungen in dem Tableau (dem ich die Vergleichung mit 1884 beifüge)

1885	Westliche Declination		Variationen 2^h—21^h	
	I	II	1885	Zuwachs gegen 1884
Januar	12° 58',5	12° 57',3	3',64	-1',05
Februar	58 ,4	58 ,0	4 ,30	-3 ,41
März	57 ,5	56 ,7	8 ,96	-1 ,79
April	57 ,4	56 ,8	10 ,49	-1 ,25
Mai	57 ,4	57 ,5	8 ,03	-1 ,49
Juni	56 ,7	56 ,2	11 ,00	0 ,40
Juli	55 ,6	55 ,1	10 ,30	1 ,48
August	56 ,2	55 ,6	7 ,77	-0 ,17
September	55 ,6	54 ,9	6 ,93	-1 ,65
October	55 ,0	53 ,4	6 ,64	-1 ,34
November	54 ,1	52 ,7	4 ,08	-0 ,75
December	53 ,0	52 ,4	2 ,48	-0 ,32
Jahr	12° 56',28	12° 55',53	7',06	-0',94

in gewohnter Weise resümirt, schliesst er mit den Worten: „Also eine schroffe Abnahme, wodurch ein ausgeprägtes Maximum auf 1884 fällt, — in bester Uebereinstimmung mit ihrer vorjährigen Ausgleichung."

529) Aus einem Schreiben des Herrn Professor Schiaparelli in Mailand vom 12. Januar 1886. (Fortsetzung zu 508.)

„Mon ami et collègue le Dr. Rajna vient de me communiquer le résultat des observations magnétiques pour 1885, qui se résume dans le Tableau suivant:

1885	Variation 2^h-20^h	Zuwachs seit 1884
Janvier	3′,89	-1′,44
Février	4 ,75	-2 ,93
Mars	8 ,83	-2 ,69
Avril	10 ,64	-2 ,87
Mai	10 ,46	-0 ,16
Juin	12 ,04	-0 ,07
Juillet	10 ,78	0 ,73
Août	10 ,13	0 ,61
Septembre	9 ,32	-0 ,91
Octobre	7 ,24	-2 ,05
Novembre	4 ,40	-1 ,46
Décembre	2 ,87	-0 ,75
Moyenne	7′,95	-1′,16

Il paraît que la diminution commence enfin à se prononcer." — Der von mir der Tafel beigefügte Zuwachs seit dem Vorjahre bestätigt Herrn Schiaparelli's Schlusssatz auf das Schönste.

530) Beobachtungen der Sonnenflecken in Madrid. — (Fortsetzung zu 514).

Herr Director Migh. Merino hat mir folgende durch Herrn Adjunkt Ventosa erhaltene Beobachtungen mitgetheilt:

1885			1885			1885			1885			1885		
I	2	6.19	IV	4	4.38	VI	8	5.69	VIII	11	5.58	X	7	3.31
–	4	4.58	–	5	4.28	–	10	4.39	–	12	4.43	–	8	3.39
–	5	4.33	–	8	4.64	–	11	6.47	–	15	6.46	–	9	3.32
–	6	4.27	–	10	5.93	–	12	6.53	–	16	5.32	–	10	3.35
–	7	6.17	–	11	5.98	–	13	5.56	–	17	7.26	–	11	3.17
–	8	3.10	–	12	7.82	–	14	7.55	–	18	5.37	–	12	3.11
–	10	2.9	–	14	3.62	–	15	7.56	–	19	6.28	–	13	2.5
–	12	3.10	–	15	4.29	–	19	6.90	–	20	6 28	–	14	1.2
–	13	1.8	–	16	4.25	–	20	5.96	–	21	6.13	–	15	0.0
–	15	3.17	–	17	3.24	–	21	6.67	–	23	3.11	–	16	2.2
–	16	4.21	–	18	2.15	–	22	6.83	–	24	4.17	–	17	3.13
–	17	4.17	–	19	4.16	–	23	5.89	–	26	7.40	–	19	4.32
–	19	5.59	–	20	4.15	–	24	5.70	–	27	6.51	–	20	4.26
–	20	7.57	–	29	4.47	–	26	6.89	–	30	4.52	–	21	4.41
–	21	6.71	–	30	5.47	–	27	4.68	–	31	4.45	–	22	3.57
–	27	7.52	V	1	8.49	–	28	5.75	IX	1	5.39	–	24	4.44
II	4	5.81	–	2	5.46	–	29	6.82	–	2	5.45	–	27	6.36
–	6	4.82	–	3	6.35	VII	1	9.118	–	4	5.29	–	28	7.43
–	7	3.66	–	5	4.43	–	2	8.109	–	5	4.34	–	29	4.25
–	9	4.75	–	7	8.91	–	3	6.126	–	6	4.19	–	30	4.31
–	11	6.52	–	10	7.52	–	4	4.113	–	7	4.19	XI	1	5.21
–	12	6.54	–	11	8.48	–	5	3.107	–	8	5.16	–	2	4.17
–	13	5.60	–	12	6.45	–	6	5.99	–	9	6.18	–	3	4.10
–	22	8.63	–	13	5.29	–	7	3.83	–	10	5.21	–	9	5.36
–	23	7.47	–	14	3.8	–	8	5.54	–	11	3.19	–	10	5.53
–	26	3.9	–	15	4.6	–	9	5.48	–	12	4.25	–	11	6.33
–	28	4.46	–	16	4.20	–	10	3.25	–	13	5.43	–	13	5.31
III	4	5.120	–	17	3.31	–	11	5.39	–	14	3.53	–	20	3.37
–	6	9.107	–	18	4.30	–	13	5.38	–	15	4.32	–	26	2.5
–	9	3.27	–	19	4.39	–	14	6.67	–	16	2.20	–	27	3.4
–	10	5.37	–	20	5.47	–	15	6.67	–	17	4.19	XII	2	1.14
–	11	5.26	–	22	7.52	–	16	8.65	–	18	4.31	–	8	2.5
–	14	5.26	–	23	7.61	–	17	9.95	–	19	3.27	–	9	2.8
–	15	5.30	–	25	8.88	–	18	7.100	–	20	3.15	–	14	4.9
–	16	3.24	–	26	9.103	–	19	7.86	–	21	3.9	–	15	2.13
–	21	4.7	–	27	9.68	–	20	5.57	–	22	5.24	–	16	2.11
–	22	4.4	–	28	10.65	–	21	5.78	–	23	6.13	–	17	2.7
–	23	0.0	–	29	7.59	–	22	6.78	–	24	5.12	–	18	2.12
–	24	2.6	–	30	9.34	–	23	6.79	–	27	7.31	–	19	4.17
–	25	4.12	–	31	7.47	–	24	7.54	–	28	7.29	–	23	8.30
–	26	4.28	VI	1	10.59	–	25	6.33	–	29	5.28	–	24	7.34
–	27	3.33	–	2	5.72	–	26	7.46	–	30	5.17	–	26	6.23
–	28	3.49	–	3	7.84	–	27	5.35	X	1	5.9	–	30	3.19
–	29	3.46	–	4	6.90	–	28	4.44	–	2	4.13	–	31	4.13
–	31	2.35	–	5	5.89	–	29	4.51	–	3	4.9			
IV	1	4.44	–	6	7.86	VIII	4	3.23	–	4	4.19			
–	2	3.46	–	7	6.85	–	10	5.65	–	6	4.36			

531) Beobachtungen der Sonnenflecken in Palermo. (Fortsetzung zu Nr. 517.)

Herr Prof. Riccò hat mir folgende, grösstentheils durch ihn selbst erhaltene Beobachtungen mitgetheilt:

1885			1885			1885			1885			1885		
I	2	6.35	II	22	8.45	IV	9	4.69	V	23	7.111	VII	2	8.78
–	3	7.44	–	23	6.—	–	10	7.75	–	24	7.106	–	3	7.88
–	4	5.45	–	24	6.49	–	12	10.53	–	25	8.158	–	4	6.156
–	5	4.67	–	25	7.73	–	13	8.71	–	26	9.103	–	5	6.127
–	7	4.52	–	26	5.36	–	15	4.33	–	27	9.76	–	6	6.83
–	8	3.10	–	27	6.40	–	16	2.12	–	28	10.79	–	7	5.52
–	9	3.16	–	28	5.31	–	17	4.73	–	29	10.80	–	8	6.36
–	11	2.6	III	1	4.33	–	18	2.13	–	30	9.64	–	9	5.13
–	12	2.7	–	2	6.100	–	19	3.16	–	31	5.29	–	10	4.11
–	14	1.6	–	3	6.81	–	20	3.15	VI	1	8.45	–	11	7.43
–	16	4.19	–	4	7.71	–	21	4.38	–	2	5.58	–	12	6.29
–	17	4.9	–	5	5.87	–	22	5.52	–	3	7.115	–	13	4.44
–	18	3.48	–	6	5.91	–	23	4.23	–	4	6.99	–	14	6.59
–	19	3.39	–	7	5.94	–	25	5.52	–	5	5.60	–	15	6.126
–	21	5.27	–	8	5.60	–	26	5.85	–	6	6.108	–	16	7.77
–	22	6.45	–	9	5.29	–	27	7.224	–	7	6.90	–	17	8.107
–	23	8.100	–	10	7.27	–	28	6.61	–	8	7.102	–	18	8.144
–	24	7.62	–	11	7.37	–	29	7.100	–	9	6.71	–	19	7.63
–	25	7.44	–	13	5.11	–	30	8.42	–	10	4.84	–	20	7.94
–	27	8.95	–	15	4.42	V	2	9.75	–	11	5.43	–	21	7.60
–	28	6.49	–	16	4.32	–	3	8.105	–	12	7.62	–	22	7.72
–	29	10.43	–	17	4.30	–	4	6.29	–	13	6.86	–	23	6.129
–	30	10.47	–	20	2.5	–	5	7.70	–	14	8.79	–	24	7.54
–	31	8.28	–	21	4.9	–	6	6.45	–	15	10.127	–	25	6.38
II	1	6.26	–	22	2.6	–	7	6.80	–	16	8.122	–	26	4.55
–	2	6.20	–	23	0.0	–	8	9.75	–	17	9.87	–	27	5.29
–	3	5.27	–	24	1.9	–	9	8.113	–	18	8.83	–	28	6.144
–	4	5.47	–	25	3.26	–	10	6.103	–	19	7.107	–	29	4.49
–	5	5.64	–	26	3.19	–	11	8.84	–	20	5.61	–	30	3.—
–	9	5.89	–	27	3.37	–	12	6.38	–	21	5.59	–	31	4.130
–	12	7.106	–	29	1.42	–	13	7.47	–	22	3.41	VIII	1	5.64
–	13	7.87	–	30	3.47	–	14	4.36	–	23	6.65	–	2	5.81
–	14	7.91	–	31	2.52	–	15	3.9	–	24	6.69	–	3	4.30
–	15	9.100	IV	1	3.39	–	16	4.20	–	25	6.32	–	4	2.26
–	16	9.89	–	2	4.36	–	17	3.39	–	26	4.52	–	5	4.26
–	17	9.52	–	3	3.—	–	18	4.32	–	27	4.48	–	6	4.33
–	18	8.70	–	4	4.19	–	19	6.38	–	28	3.67	–	7	5.51
–	19	11.53	–	5	4.20	–	20	6.34	–	29	4.51	–	8	9.56
–	20	9.41	–	6	5.40	–	21	8.80	–	30	8.104	–	9	7.70
–	21	8.49	–	7	5.35	–	22	7.40	VII	1	8.51	–	10	7.210

1885			1885			1885			1885			1885		
VIII	11	6.106	IX	5	6.39	X	3	4.11	XI	1	5.111	XI	29	2.3
–	12	5 66	–	7	4.24	–	4	4.12	–	2	4.78	–	30	0.0
–	13	8.54	–	8	4.21	–	5	3.11	–	3	3.14	XII	1	0.0
–	14	6.70	–	9	3.8	–	6	3.35	–	4	3.11	–	2	1.25
–	15	6.112	–	10	2.8	–	7	5.57	–	5	2.13	–	4	1.8
–	16	5.72	–	11	3.6	–	8	5.35	–	6	2.8	–	5	1.2
–	17	4.48	–	12	3.11	–	9	4.77	–	7	5.20	–	7	0.0
–	18	6.152	–	13	2.38	–	10	4.28	–	8	3.16	–	8	1.6
–	19	5.57	–	14	3.66	–	11	4.29	–	9	4.33	–	9	1.3
–	20	5.73	–	15	3.26	–	12	3.15	–	10	4.47	–	10	4.45
–	21	4.11	–	16	2.34	–	13	1.2	–	11	5.38	–	12	3.6
–	22	2.5	–	17	2.9	–	15	1.8	–	12	4.20	–	13	5.13
–	23	3.14	–	18	2.17	–	16	1.1	–	13	5.27	–	15	1.37
–	24	3.9	–	19	3.55	–	17	3.12	–	16	5.76	–	16	1.46
–	25	2.20	–	20	3.29	–	18	3.21	–	17	5.60	–	17	2.53
–	26	3.45	–	21	3.11	–	19	5.23	–	18	5.35	–	18	2.38
–	27	4.73	–	22	3.36	–	22	3.52	–	19	4.19	–	19	6.72
–	28	6.45	–	23	5.71	–	23	5.60	–	21	3.71	–	20	5.26
–	29	5.66	–	24	5.29	–	24	4.66	–	22	3.42	–	21	6.71
–	30	5.46	–	25	4.23	–	25	7.50	–	23	3.36	–	23	3.16
–	31	5.36	–	26	5.15	–	27	8.52	–	24	2.12	–	24	5.31
IX	1	5.21	–	28	5.43	–	28	8.84	–	25	2.18	–	25	5.22
–	2	4.34	–	30	5.37	–	29	5.44	–	26	2.18	–	26	6.124
–	3	5.42	X	1	4.7	–	30	4.75	–	27	3.27	–	27	4.77
–	4	5.51	–	2	4.8	–	31	4.57	–	28	2.80	–	28	3.56

(Fortsetzung folgt.)

Ueber eine ebene Reciprocität und ihre Anwendung auf ebene Curven*)

von

Dr. Christian Beyel.

Tafel I. Fig. 9—13.

1.

Seien $A\,B\,C$ die Ecken, $a\,b\,c$ die ihnen gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks. Mit $p_a\,p_b\,p_c$ bezeichnen wir die Geraden, welche einen beliebigen Punkt in der Ebene des Dreiecks mit $A\,B\,C$ verbinden. $P_a\,P_b\,P_c$ seien die Schnittpunkte einer durch P gehenden Geraden p mit den Seiten $a\,b\,c$. Dann können wir beweisen, dass

$$(p\,p_a\,p_b\,p_c) = (P\,P_a\,P_b\,P_c) \text{ ist.}$$

Schneiden wir nämlich das Büschel $p\,p_a\,p_b\,p_c$ mit a und sei H der Schnittpunkt von a mit P A, so erhalten wir die Projectivität: $(p\,p_a\,p_b\,p_c) \overline{\wedge} (P_a\,H\,B\,C)$. Letztere Gruppe projiciren wir aus A und schneiden das hierdurch erhaltene Büschel mit p. Dann ist: $(P_a\,H\,B\,C) \overline{\wedge} (P_a\,P\,P_c\,P_b)$. Weil aber allgemein $(P_a\,P\,P_c\,P_b) = (P\,P_a\,P_b\,P_c)$, so folgt $(p\,p_a\,p_b\,p_c) = (P\,P_a\,P_b\,P_c)$ was zu beweisen war.

---

*) Vgl. A. Ameseder: Ueber ein Nullsystem zweiten Grades. Sitzungsberichte der k. Academie der Wissenschaften. Bd. LXXXIII. II. Abth. Februar-Heft. Jahrg. 1881. Dort wird die Reciprocität (C B A Δ) von anderem Gesichtspunkte aus besprochen. Die aus derselben hervorgehende Erzeugung von Curven 4ter Ordnung mit drei Doppelpunkten habe ich in meiner Abhandlung über centrische Collineationen $n$ter Ordnung (Vierteljahrsschrift der Zürcher naturforschenden Gesellschaft 1881. Bd. XXVI. S. 297) und in der Abhandlung über Curven 4ter Ordnung mit drei doppelten Inflexionscurven (Schlomilch: Zeitschrift für Mathematik und Physik XXX) benutzt.

Es knüpft sich an diesen Satz folgende Aufgabe: Durch einen Punkt — P — der Ebene soll eine Gerade p gezogen werden, welche die Seiten eines Dreiecks in der Weise schneidet, dass P mit den Schnittpunkten — in vorgeschriebener Reihenfolge — ein gegebenes Doppelverhältniss bildet. Um diese Aufgabe zu lösen, verbinden wir P mit den Ecken des Dreiecks. Dann wird p nach der Relation $(p_c\, p_b\, p_a\, p) = \varDelta$ gefunden. Da es zu drei Geraden sechs gibt, welche mit jenen ein vorgeschriebenes Doppelverhältniss bilden, so schliessen wir:

Wir können die Seiten eines Dreiecks mit sechs Geraden durch einen gegebenen Punkt so schneiden, dass dieser Punkt mit den Schnittpunkten das Doppelverhältniss $\varDelta$ bildet.

Die Aufgabe, welche der besprochenen dual gegenüber steht, verlangt in einer Geraden p diejenigen Punkte, von denen aus nach den Ecken eines Dreiecks Strahlen gehen, welche mit p ein bestimmtes Doppelverhältniss bilden. Es gibt sechs solche Punkte. Sie bilden resp. mit den Punkten, welche p aus den Seiten des in Rede stehenden Dreiecks schneidet, das Doppelverhältniss $\varDelta$.

2.

Eindeutig sind die erwähnten Aufgaben, wenn wir die Ecken und Seiten des Dreiecks festsetzen und die Reihenfolge angeben, in welcher die Punkte in p resp. die Strahlen durch P mit P resp. p das Doppelverhältniss $\varDelta$ bilden. Durch diese Festsetzung wird jedem Punkte P eine und nur eine Gerade p zugeordnet, für welche $(p_c\, p_b\, p_a\, p) = \varDelta$ ist. Auf jeder Geraden p liegt aber nur ein Punkt P, der durch die Bedingung $(P_c\, P_b\, P_a\, P) = \varDelta$ bestimmt ist. Es wird also auf diese Weise eine eindeu-

tige Correspondenz zwischen den Punkten und Geraden der Ebene festgelegt. Jeder Punkt geht durch eine Gerade, jede Gerade enthält ihren Punkt.

Entsprechend den Bestimmungsstücken wollen wir diese Reciprocität mit dem Symbol (C B A $\varDelta$) oder ($c\,b\,a\,\varDelta$) bezeichnen.

Sei nun C_n eine Curve n ter Classe in der Ebene der Reciprocität. Wir fragen dann nach dem Orte der Punkte, welche den Tangenten von C_n in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) entsprechen. Wir haben also in jeder Tangente p von C_n die Schnittpunkte $P_a\,P_b\,P_c$ mit den Seiten $a\,b\,c$ des Dreiecks A B C zu bestimmen und je einen Punkt P zu construiren, für den $(P_c\,P_b\,P_a\,P) = \varDelta$ ist. Für diese Construction geben wir eine räumliche Interpretation. Wir betrachten P_c als Fusspunkt einer Normalen — n_c — zur Ebene der Reciprocität. In n_c bestimmen wir zwei Punkte — $C_1\,C_2$ — in der Weise, dass $\frac{P_c\,C_1}{P_c\,C_2} = \varDelta$ ist. Weiter errichten wir in P_b eine Normale — n_b — zur Ebene der Reciprocität. Ziehen wir jetzt $C_1\,P_a$ und schneide diese Gerade aus n_b den Punkt S, so trifft $S\,C_2$ die Ebene der Reciprocität in P.

Um diese Construction auf allen Tangenten von C_n durchzuführen, denken wir uns in c und b die resp. Ebenen C, B bestimmt, welche zur Ebene der Reciprocität senkrecht stehen. Dann ziehen wir in der Ebene C zwei durch B gehende Gerade — $c_1\,c_2$ — von der Art, dass $\frac{tg\;c\;c_1}{tg\;c\;c_2} = \varDelta$ ist. Die Tangente von C_n betrachten wir als Spuren von Normalebenen. Diese umhüllen somit einen zur Ebene der Reciprocität senkrechten Cylinder — C_{yn} — der n ten Classe. Jede derselben schneidet aus $c_1\,c_2$

ein Punktepaar — $C_1 C_2$ — und aus a einen Punkt P_a. Ziehen wir $C_1 P_a$ und treffe diese Linie B in S, so schneidet $S C_2$ aus der Ebene der Reciprocität einen Punkt P. $S C_2$ aber ist eine Tangente des Cylinders C_{yn}.

Bemerken wir jetzt, dass alle Linien $C_1 P_a$ in der Ebene durch c_1 und a liegen, so folgt, dass alle Punkte S in der Schnittlinie — s — der letztern Ebene mit der Ebene B sich befinden. Also stellen uns die Linien $S C_2$ die Gesammtheit der Geraden vor, welche die windschiefen Geraden $s_1 c_2$ schneiden und den Cylinder C_{yn} berühren. Sie erfüllen eine Regelfläche — R^{2n} — vom Grade $2n$. Wir können nämlich beweisen, dass eine beliebige Gerade g des Raumes $2n$ der Linien $S C_2$ schneidet. Zu diesem Zwecke betrachten wir das Hyperboloid H^2, welches durch die Geraden s, c_2 und g bestimmt wird. Dieses hat $2n$ Tangentialebenen mit C_{yn} gemein. Wir erhalten dieselben, indem wir den Cylinder 2 ter Classe — C_{y2} — zeichnen, der aus dem unendlich fernen Punkte von C_{yn} an H^2 gelegt werden kann. Die gemeinsamen Tangentialebenen zwischen C_{yn} und C_{y2} sind zugleich Tangentialebenen an C_{yn} und H^2. Sie schneiden c_2 und s in Punkten, deren resp. Verbindungslinien zu den Geraden $S C_2$ gehören und auf H_2 liegen. Also müssen sie g schneiden. Folglich wird, wie behauptet, g von $2n$ Linien $S C_2$ getroffen. Schneiden wir R^{2n} mit der Ebene der Reciprocität, so erhalten wir den Ort der Punkte P. Dieser ist nach dem bewiesenen eine Curve der $2n$ten Ordnung — C^{2n} — und wir sagen:

Den Tangenten einer Curve von der n ten Classe correspondiren in der Reciprocität ($C B A \Delta$) Punkte, deren Ort eine Curve 2 n ter Ordnung ist.

Wir können diess auch so ausdrücken:

Construiren wir zu den Punkten, in welchen die Tangenten einer Curve n ter Classe die Seiten eines Dreiecks schneiden, je den Punkt, welcher mit jenen — in vorgeschriebener Reihenfolge — ein bestimmtes Doppelverhältniss Δ bildet, so ist der Ort dieses Punktes eine Curve von der 2 n ten Ordnung.

3.

Die Untersuchung der Regelfläche R^{2n} gibt uns weiteren Aufschluss über die Curve C^{2n}. Aus der gegebenen Erzeugungsweise von R^{2n} folgt, dass sowohl durch jeden Punkt von s wie von c_2 n Gerade der Regelfläche R^{2n} gehen. Also sind s und c_2 n fache Linien dieser Fläche. *Mithin ist B und C ein n facher Punkt der Curve* C^{2n}.

Eine weitere n fache Linie von R^{2n} ist die Schnittlinie der Ebenen B und C. Sie trifft die Ebene der Reciprocität in A. *Also ist auch A ein n facher Punkt von* C^{2n}.

Hat C_n eine r fache Tangente — t_r — so schneidet die Ebene, welche durch t_r geht und zur Ebene der Reciprocität normal steht, aus c und s Punkte, deren Verbindungslinie eine r fache Gerade von R^{2n} ist. Letztere trifft die Ebene der Reciprocität in einem r fachen Punkte von C^{2n}. Also folgt: *Auf den r fachen Tangenten von* C_n *liegen r fache Punkte von* C^{2n}.

Sei g eine Gerade in der Ebene der Reciprocität, so fragen wir nach der Construction der Schnittpunkte von C^{2n} mit g. Um diese durchzuführen, bestimmen wir das Hyperboloid H^2, welches durch s, c_2 und g gegeben ist und zeichnen den zur Ebene der Reciprocität normalen Cylinder C_{g2} an H^2. Dieser schneidet die Ebene der Reciprocität in einem Kegelschnitt K_g^2. Seine gemein-

samen Tangenten mit C_n sind Spuren von Tangentialebenen, welche H^2 und C_{yn} gemeinsam sind. Folglich schneiden diese Tangenten aus g die gesuchten Punkte von C^{2n}.

Zur Construction von K_g^2 bemerken wir Folgendes: Die Geraden $g\,a\,c_2$ und s liegen auf dem Hyperboloid H^2. C und B sind Tangentialebenen dieses Hyperboloides, welche auch den Cylinder C_{y2} berühren. Daraus folgt, dass g, a, c, b Tangenten des Kegelschnittes K_h^2 sind. Wir bestimmen diesen Kegelschnitt vollends, indem wir die zweite Gerade h des Hyperboloides H^2 zeichnen, welche in der durch g gehenden Normalebene G zur Ebene der Reciprocität liegt. Diese schneidet resp. $c_1 c_2\,a\,b\,c$ in Punkten C_1 C_2 P_a P_b P_c. Ziehen wir dann C_1 P_a, so trifft diese Linie s im Schnittpunkte S der Ebene G mit s. Die Verbindungslinie SC_2 ist die gesuchte Gerade h. Sie schneidet g in einem Punkte G, welcher der Berührungspunkt der Tangentialebene G an H^2 und mithin der Berührungspunkt von g an K_g^2 ist. Zugleich ersehen wir aus der Construction von G, dass dieser Punkt mit $P_a P_b P_c$ durch die Relation $(P_c\,P_b\,P_a\,G) = \varDelta$ verbunden ist. G ist also der correspondirende zu g in der Reciprocität $(CBA\varDelta)$.

Die Construction der Schnittpunkte von g mit C^{2n} lässt sich nach dem Gesagten dahin zusammenfassen: *$a\,b\,c\,g$ und der entsprechende Punkt zu g bestimmen als vier Tangenten und Berührungspunkt in einer einen Kegelschnitt, dessen gemeinsame Tangenten mit C_n die Gerade g in Punkten von C^{2n} treffen.*

Berührt der Kegelschnitt K_g^2 die Curve C_n, so schneidet die Tangente im Berührungspunkte aus g zwei benachbarte Punkte von C^{2n} d. h. g berührt in diesen Punkten C^{2n}. Wir können dies dahin verallgemeinern: Hat K_g^2

in p Punkten mit C_n eine einfache Berührung, so ist g eine $p$fache Tangente an C^{2n}. Osculirt K_g^2 die Curve C_n, so ist g eine Wendetangente an C^{2n} u. s. f.

4.

Zu jeder Geraden g der Ebene gehört ein Kegelschnitt K_g^2. Alle diese Kegelschnitte haben $a\,b\,c$ zu gemeinsamen Tangenten, bilden folglich ein Netz und die Geraden g stehen zu den Kegelschnitten dieses Netzes in der Beziehung einer quadratischen Transformation. Um in derselben zu einem Kegelschnitt K_g^2 die correspondirende Gerade zu finden, heben wir folgende Eigenschaften von K_g^2 hervor: Sei t eine beliebige Tangente an K_g^2, so geht durch dieselbe eine Tangentialebene T an H^2. In dieser muss eine Gerade h des letzterwähnten Hyperboloides liegen. h ist die Verbindungslinie der Punkte, in welchen T die Geraden s und c_2 schneidet, und trifft die Ebene der Reciprocität in einem Punkte P von g. Seien dann die Punkte, in denen t die Geraden $c\,b\,a$ schneidet, resp. durch $P_c\,P_b\,P_a$ bezeichnet, so wird die gegebene Construction des Punktes P durch die Relation $(P_c\,P_b\,P_a\,P) = \varDelta$ ausgedrückt, d. h. P ist der correspondirende Punkt zu t in der Reciprocität (C B A $\varDelta$). Nun war t eine beliebige Tangente an K_g^2. Wir sagen also: Die Punkte, welche in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) den Tangenten von K_g^2 entsprechen, liegen auf *der* Geraden g, welche in der quadratischen Transformation dem Kegelschnitt K_g^2 entspricht.

In jedem nicht singulären Punkte von C_n berührt ein Kegelschnitt K_g^2 diese Curve. Ihm correspondirt in der quadratischen Transformation eine Gerade, welche C^{2n} berührt. Somit *erscheint C^{2n} als die Enveloppe aller der*

Geraden, welche in der quadratischen Transformation den Kegelschnitten entsprechen, die C_n berühren.

Damit ist das Mittel gegeben, um in einem nicht singulären Punkte P von C^{2n} auf lineare Weise die Tangente zu zeichnen. Wir bestimmen die entsprechende Gerade p zu P in der Reciprocität (C B A $\varDelta$). Dann construiren wir den Berührungspunkt dieser Geraden an C^n. In ihm wird p von einem Kegelschnitt K_g^2 berührt. An denselben geht durch P eine zweite Tangente, welche in P die Curve C^{2n} berührt.

Sollen die Tangenten aus einem beliebigen Punkte X der Ebene an C^{2n} gezogen werden, so bemerken wir, dass den Geraden durch x in der quadratischen Transformation die Kegelschnitte einer Schaar correspondiren; denn diese werden ausser von $a\,b\,c$ noch von derjenigen Geraden x berührt, welche X in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) entspricht. Denjenigen unter diesen Kegelschnitten, welche C_n berühren, correspondiren in der quadratischen Transformation die Tangenten durch X an C^{2n}.

Ist ein in C^{2n} gelegener Punkt D zugleich Berührungspunkt der entsprechenden Geraden d an C_n, so ist D ein gemeinsamer Punkt von C^{2n} und C_n. Construiren wir in ihm auf die oben angegebene Weise die Tangente an C^{2n}, so finden wir, dass diese mit d zusammenfällt.

Wir können dies auch so ausdrücken:

Correspondirt einem gemeinsamen Punkte von C_n und C^{2n} in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) *die Tangente in ihm an C_n, so berühren sich in diesem Punkte die Curven C_n und C^{2n}.*

5.

Indem wir das Dreieck A B C festhalten, wollen wir $\varDelta$ alle möglichen reellen Werthe geben. Zu jedem der-

selben gehört ein Linienpaar c_2 und s. Seien z. B c_2^* und s^* die Geraden, welche Δ^* zugeordnet sind und sei C^{2n} die Curve, welche wir in der Reciprocität (C B A Δ) aus C_n abgeleitet haben, so untersuchen wir jetzt die Enveloppe der Geraden, welche den Punkten von C^{2n} in der Reciprocität (C B A Δ^*) entsprechen. Durch jeden Punkt P von C^{2n} geht eine Transversale t^* zu c_2^* und s^*. Legen wir durch eine derselben eine Normalebene — P — zur Ebene der Reciprocität, so trifft P die resp. Geraden $a\,b\,c$ in Punkten $P_a^*\,P_b^*\,P_c^*$ einer Geraden p^* und es gilt die Relation $(P_c^*\,P_b^*\,P_a^*\,P^*) = \Delta^*$. p^* ist also die entsprechende zu p in der Reciprocität (C B A Δ^*).

Wir erhalten mithin die Enveloppe der p^*, indem wir an die Regelfläche der t^* einen Cylinder C_{yn}^* legen, dessen Richtung normal zur Ebene der Reciprocität ist. Er schneidet letztere Ebene in den p^*. Nun sind die Geraden t^* Transversalen zu den drei Leitlinien C^{2n} c_2^* s^*, von denen c_2^* und s^* mit C^{2n} je einen $n$fachen Punkt gemein haben. Folglich erfüllen die Linien t^* eine Regelfläche — R^{2n*} — deren Grad gleich $2\,.\,2\,n - 2\,n = 2\,n$ ist.

Ein Berührungscylinder an diese Fläche ist im Allgemeinen von der $2\,n$ten Classe.

Betrachten wir speciell den Cylinder C_{yn}^* und construiren wir an ihn die Tangentialebenen, welche durch eine Normale — p — zur Ebene der Reciprocität gehen, so bemerken wir, dass n von diesen Ebenen in die Ebene $p\,B$ und n in die Ebene $p\,C$ zusammenfallen. Daraus folgt, dass die Ebenenbüschel, welche in B und C zur Ebene der Reciprocität senkrecht stehen, Theile des erwähnten Cylinders sind. Der Rest desselben ist somit ein Cylinder der $n$ten Classe. Er schneidet die Ebene der

Reciprocität in einer Curve der n ten Classe C^*_n. Also umhüllen die p^* eine Curve der n ten Classe.

Zu jedem Werthe von $\varDelta$ gehört eine solche Curve der n ten Classe. Aus ihr kann C^{2n} in einer Reciprocität der betrachteten Art abgeleitet werden und es gelten für sie die Beziehungen, welche wir oben zwischen C^{2n} und einer Curve C_n entwickelt haben. Daraus folgt, dass alle diese Curven C_n dieselben Charaktere haben müssen.

Sei P ein Punkt von C^{2n} und p eine durch P gehende Gerade, so ist durch P und die Schnittpunkte von p mit den Seiten des Dreiecks $a\,b\,c$ das Doppelverhältniss $\varDelta$ einer Reciprocität (A B C $\varDelta$) festgesetzt. Ziehen wir dann durch weitere Punkte von C^{2n} diejenigen Geraden, welche diesen Punkten in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) entsprechen, so umhüllen diese Geraden eine Curve der n ten Classe. Wir können dies so ausdrücken:

Alle die Geraden, welche die Seiten des Dreiecks abc und C^{2n} in resp. Punktegruppen von constantem Doppelverhältniss treffen, umhüllen eine Curve n ter Classe.

6.

Wir untersuchen jetzt die Enveloppe der Geraden, welche in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) den Punkten P einer Curve n ter Ordnung — C^n — entsprechen. Wir stellen damit eine Frage, welche der unter 2 behandelten dual gegenübersteht. Sie führt zu Sätzen, welche den oben gegebenen dual sind. Wir unterlassen es, diese hier weiter auszuführen und begnügen uns für den directen Beweis derselben eine räumliche Darstellung zu geben.

Zu diesem Zwecke gehen wir von dem Ausdrucke $(p_c\, p_b\, p_a\, p) = \varDelta$ aus und übertragen die Construction desselben auf den Raum. Wir errichten in B und C die

resp. Normalen n_b und n_c zur Ebene der Reciprocität. In n_c construiren wir zwei Punkte $C_1 C_2$, welche der Bedingung genügen: $C C_1 : C C_2 = \varDelta$. Dann legen wir durch C_1 und p_a eine Ebene. Sie treffe n_b in einem Punkte S. Durch diesen, durch P und C_2 geht eine Ebene. Sie schneidet die Ebene der Reciprocität in p.

Lassen wir P sich auf C^n bewegen, so bilden alle Ebenen, welche durch C_1 und die p_a gehen, ein Büschel, dessen Scheitelkante $C_1 A$ — sagen wir a_1 — ist. Dieses schneidet n_b in einer Punktereihe S. Es sind also die Geraden — t — welche die in den Ebenen durch a_1 liegenden Punkte P mit den resp. Punkten S verbinden, die gemeinsamen Transversalen zu a_1, n_b und C^n. Folglich erfüllen sie eine Regelfläche des 2nten Grades — R^{2n}. Legen wir durch C_2 und diese Geraden t Ebenen, so schneiden letztere die Ebene der Reciprocität in den Geraden p, welche den Punkten P in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) entsprechen. Diese Ebenen durch C_2 bilden den Kegel aus C_2 an R^{2n}, also einen Kegel der $2n$ten Classe. Er trifft die Ebene der Reciprocität in einer Curve der $2n$ten Classe. Daraus ergeben sich Sätze, welche den in 2 hervorgehobenen dual sind.

Seien aus einem Punkte G der Ebene die Tangenten an C_{2n} zu bestimmen, so benutzen wir das Hyperboloid H^2, welches durch die windschiefen Geraden a_1 n_b und $\overline{G C_2}$ bestimmt wird. Dieses trifft die Ebene der Reciprocität in einem Kegelschnitt K_g^2.

Sei P ein gemeinsamer Punkt von K_g^2 und C^n, so geht durch ihn eine Transversale t zu a_1 und n_b, welche sowohl auf H^2 wie auf R^{2n} liegt. Sie wird also die Gerade $\overline{G C_2}$ schneiden und mit C_2 eine Tangentialebene an R^{2n} bestimmen. Diese trifft die Ebene der Reciprocität

in einer durch P und G gehenden Tangente an C_{2n}. Bemerken wir noch, dass K_g^2 durch A B C geht und in G von der Geraden g berührt wird, welche dem Punkte G in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) entspricht, so ergeben sich Schlüsse, welche den in 3 und 4 hervorgehobenen dual gegenüber stehen.

Lassen wir $\varDelta$ alle möglichen reellen Werthe annehmen, so gehört zu jedem derselben ein Punktepaar $C_1 C_2$, z. B. zu $\varDelta^*$ die Punkte $C_1^* C_2^*$. Halten wir dann die jetzt gefundene Curve C_{2n} fest, so ist der Kegel über ihr aus C_2^* von der $2n$ten Classe. Seien S^* die Schnittpunkte der Tangentialebenen dieses Kegels mit n_b, so ziehen wir die Gerade durch C_1 nach den S^*. Diese schneiden die Ebene der Reciprocität in Punkten P^*, denen in der Reciprocität (C B A $\varDelta^*$) die Tangenten an C_{2n} entsprechen. Der Ort der Punkte P^* ist von der $n$ten Ordnung.

Sei nämlich g eine beliebige Gerade in der Ebene der Reciprocität und schneide die Ebene durch c_1 und g aus n_b den Punkt S_g, so ziehen wir $\overline{S_g C_2}$. Diese Linie trifft die Ebene der Reciprocität in einem Punkte G, welcher in a liegt. Durch ihn gehen $2n$ Tangenten an C_{2n}. Von diesen liegen n in der Geraden a, welche für C_{2n} eine $n$fache Tangente ist. Die übrigen schneiden g in n Punkten P^*. Also liegen alle Punkte P^* auf einer Curve der $n$ten Ordnung.

Wir schliessen aus dem Gesagten, dass zu jedem reellen Werthe von $\varDelta$ eine Curve $n$ter Ordnung gehört, aus der C^{2n} in einer Reciprocität der betrachteten Art abgeleitet werden kann.

7.

Das Princip der besprochenen Reciprocität ist einer Erweiterung fähig. Wir gehen bei derselben von zwei

Geraden a, c und einer Curve n ter Ordnung — B^m — aus. Eine beliebige Gerade der Ebene schneide a, c, B^m in den resp. Punkten P_a, P_c, P_{b1} P_{b2} ... P_{bm}. Dann erhalten wir m Punkte $P_1 P_m$ auf p durch Construction der Relationen: $(P_c P_{b1} P_a P_1) = \varDelta = ... (P_c P_{bm} P_a P_m)$. Hierdurch sind jeder Geraden p m ihrer Punkte zugeordnet. Wir wollen diese Reciprocität mit dem Symbol $(c B^m a \varDelta)$ bezeichnen.

Wir stellen — wie unter 2 — auch hier die Frage nach dem Orte der Punkte P, welche den Tangenten — p — einer Curve n ter Classe correspondiren. Wir gelangen zu demselben durch eine räumliche Darstellung, welche an die in 2 gegebene Interpretation der Construction eines Doppelverhältnisses anknüpft. Wir legen durch c eine Normalebene — C — zur Ebene der Reciprocität. In C ziehen wir durch den Schnittpunkt B von a und c zwei Gerade — $c_1 c_2$ —, welche die Bedingung erfüllen: $\frac{\operatorname{tg} c\, c_1}{\operatorname{tg} c\, c_2} = \varDelta$. B^m betrachten wir als Spur eines zur Ebene der Reciprocität normalen Cylinders B^y_m. C_n sei die Spur eines normalen Cylinders C_{yn}. Die Tangentialebenen des letztern schneiden $c_1 c_2 B^m a c$ in den resp. Punkten $C_1 C_2 P_{b1} ... P_{bm} P_a P_c$. Die Geraden, welche die resp. Punkte $C_1 P_a$ verbinden, liegen in der Ebene $c_1 a$ und treffen B^y_m in einer Curve der m ten Ordnung S^m. Verbinden wir die Punkte dieser Curve mit den resp. C_2, so tangiren diese Verbindungslinien den Cylinder C_{yn} und schneiden die Ebene der Reciprocität in den Punkten P. Nun stellen die resp. Geraden $\overline{S C_2}$ die Gesammtheit aller Transversalen zu c_2 und S_m vor, welche C_{yn} tangiren. Sie liegen auf einer Regelfläche des $2mn$ ten Grades — R^{2mn}. Jede Gerade g schneidet nämlich diese Fläche

in $2mn$ Punkten; denn die Transversalen zu g, c_2 und S^m liegen auf einer Regelfläche des $2m$ten Grades. Diese hat $2mn$ Tangentialebenen mit C_{yn} gemeinsam, welche g in Punkten von R^{2mn} schneiden. Die Ebene der Reciprocität trifft R^{2mn} im Orte der Punkte P und wir schliessen daher:

Die Punkte, welche in der Reciprocität ($c B^m a \Delta$) *den Tangenten einer Curve n ter Classe entsprechen, liegen auf einer Curve von der Ordnung $2mn$.*

c_2 und S^m sind $n$fache Linien von R^{2mn}. Mithin sind B und die Schnittpunkte von a mit B^m $n$fache Punkte von C^{2mn}. Die Geraden, in welchen die Ebene C den Cylinder B^y_m trifft, sind ebenfalls $n$fache Linien von R^{2mn}. Also sind die Schnittpunkte von c mit B^m $n$fache Punkte von C^{2mn}.

Von hier aus lässt sich leicht übersehen, dass ein Gedankengang, welcher analog dem (2—6) durchgeführten ist, zur Verallgemeinerung der dort gegebenen Resultate führt.

8.

Wir ziehen zum Schlusse einige Consequenzen aus dem Gesagten für $n = 1$ und $n = 2$.

a) Setzen wir $n = 1$, so folgt aus den Ausführungen von 2:

Satz: Die Punkte, welche in der Reciprocität ($CBA\Delta$) *den Strahlen eines Büschels correspondiren, liegen auf einem Kegelschnitt K^2* oder:

Construiren wir zu den Punkten, in welchen die Strahlen eines Büschels die Seiten eines Dreiecks schneiden, je den Punkt, welcher mit jenen — in gleicher Reihen-

folge genommen — ein vorgeschriebenes Doppelverhältniss $\varDelta$ *bildet, so ist der Ort dieses Punktes ein Kegelschnitt* K^2.

K^2 wird nach dem in 2 gesagten aus einem Hyperboloid H^2 geschnitten, welches durch s, c_2 und die Gerade n_p bestimmt wird, die im Scheitel P des Büschels zur Ebene der Reciprocität senkrecht steht. Also geht K^2 durch die Ecken — A B C — des Dreiecks und durch den Punkt P. Die Tangente in P an K^2 ist diejenige Gerade, welche in der Ebene der Reciprocität (C B A $\varDelta$) dem Punkte P entspricht. Um die Tangente in B zu construiren, zeichnen wir die Tangentialebene T in B an das Hyperboloid H^2. Diese geht durch c_2 und eine Gerade d, welche die Ebene durch n_p und B aus der Ebene durch C_1 und a schneidet. Die Schnittlinie der Ebene T mit der Ebene der Reciprocität ist die Tangente — b_1 — in B an K^2. Bezeichnen wir die Schnittlinie der Ebene n_p B und der Ebene der Reciprocität — also die Gerade B P — durch p, so lässt sich die angegebene Construction von b_1 durch das Symbol (c p a b_1) = $\varDelta$ ausdrücken. Liegt P auf einer der Seiten des Dreiecks A B C — etwa auf a — so degenerirt K^2 in zwei Gerade. Die eine ist a; die andere geht durch A und bildet mit c, b und A P das Doppelverhältniss $\varDelta$.

Geben wir einen Kegelschnitt durch 5 Punkte, so können wir diese zu 10 verschiedenen Dreiecken anordnen. Die Seiten *eines* solchen Dreiecks werden von der Verbindungslinie der 2 übrigen unter den 5 Punkten in 3 Punkten geschnitten. Diese bilden mit jedem von jenen 2 Punkten 6 Doppelverhältnisse von verschiedenem Werthe. Durch jedes derselben und das in Rede stehende Dreieck wird eine Reciprocität (C B A $\varDelta$) festgesetzt. In

allen diesen Reciprocitäten erscheint der durch 5 Punkte bestimmte Kegelschnitt als Ort von Punkten, welche den Strahlen eines Büschels entsprechen. Indem wir also in irgend einem Punkte P eines Kegelschnittes eine derartige Reciprocität festsetzen, können wir sagen:

Satz: Die Geraden, welche durch einen Punkt P eines Kegelschnittes gehen, schneiden aus den Seiten eines Dreiecks, das dem Kegelschnitt eingeschrieben ist, Punkte, welche — in gleicher Reihenfolge genommen — mit dem zweiten Schnittpunkte der Geraden und des Kegelschnittes das nämliche Doppelverhältniss Δ bilden.

Halten wir A B C fest, so finden wir für jeden Punkt P des Kegelschnittes ein Δ. Geben wir Δ, so erhalten wir den zugehörigen Punkt P, indem wir in B die Tangente b_1 construiren und eine Gerade p zeichnen, für welche $(c\, p\, a\, b_1) = \Delta$ ist. Der zweite Schnittpunkt von p mit K^2 ist P.

Damit ist die Aufgabe gelöst, die Seiten eines Dreiecks, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, durch eine Gerade so zu schneiden, dass die Schnittpunkte mit einem Punkte des Kegelschnittes — in vorgeschriebener Reihenfolge — ein gegebenes Doppelverhältniss bilden. Es gibt unendlich viele Gerade, welche dieser Bedingung genügen. Sie gehen alle durch einen Punkt des Kegelschnittes.

b) Seien $p_1\, p_2$ zwei Gerade durch P. Ihre Schnittpunkte mit $a\, b\, c$ seien P_{a1}, P_{b1}, P_{c1} und P_{a2}, P_{b2}, P_{c2}. Ihre zweiten Schnittpunkte mit K^2 seien $P_1\, P_2$. Dann sagt der zuletzt hervorgehobene Satz aus, dass

$$(P_{c1}\, P_{b1}\, P_{a1}\, P_1) = (P_{c2}\, P_{b2}\, P_{a2}\, P_2).$$

Die Punkte $P_{a1} \ldots P_{a2} \ldots$ bestimmen also projectivische Reihen

auf $p_1 p_2$. Folglich sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser Reihen, d. h. $a, b, c, \overline{P_1 P_2}$ — Tangenten eines Kegelschnittes — K_1^2 — der von $p_1 p_2$ berührt wird. Wir schliessen daher:

Satz: Zwei Dreiecke, welche einem Kegelschnitt eingeschrieben sind, umhüllen einen zweiten Kegelschnitt.

c) Gegeben sei ein Viereck. $a\,b\,c\,d$ seien *die* vier Seiten desselben, von denen keine drei in einer Ecke zusammenstossen. Gesucht werden die Geraden durch einen Punkt P der Ebene, welche die Seiten $a\,b\,c\,d$ in 4 Punkten $P_a\,P_b\,P_c\,P_d$ schneiden, deren Doppelverhältniss $\varDelta$ ist. Zur Lösung dieser Aufgabe betrachten wir 3 Seiten des Vierecks als die Geraden einer Reciprocität $(a\,b\,c\,\varDelta)$. In dieser correspondiren nach einem Satze, der dem ersten unter *a*) abgeleiteten dual ist, den Punkten der Geraden d die Tangenten eines Kegelschnittes K^2. An diesen gehen durch P zwei Tangenten, welche die Aufgabe lösen. Wir schliessen daher:

Satz: Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Gerade, welche die Seiten eines Vierecks, von denen keine drei in einer Ecke zusammentreffen, in vier Punkten schneiden, die — in gleicher Reihenfolge genommen — ein vorgeschriebenes Doppelverhältniss bilden. Diese Geraden umhüllen mit den erwähnten Seiten des Vierecks einen Kegelschnitt.

Ueber Curven IV. Ordnung mit einem doppelten Berührungsknoten und einem Doppelpunkte.

Mit 2 Tafeln. — Figur 1—13.

1.

Wir gehen von einer ebenen Reciprocität aus, welche durch zwei Gerade a, c, einen Kegelschnitt B^2 und ein Doppelverhältniss $\varDelta$ festgesetzt wird, also von einer Reciprocität $(c B^2 a \varDelta)$*) und untersuchen den Ort der Punkte, welche den Strahlen eines Büschels mit dem Scheitel P correspondiren. Damit specialisiren wir die in der citirten Abhandlung unter 7 gegebenen Ausführungen für $m = 2$ und $n = 1$. Wir schliessen also:

Satz. In der Reciprocität $(c B^2 a \varDelta)$ *correspondiren den Strahlen eines Büschels die Punkte einer Curve vierter Ordnung* — C^4 — oder: *construiren wir zu den Punkten, in welchen die Strahlen eines Büschels zwei Gerade und einen Kegelschnitt treffen, je die zwei Punkte, welche mit jenen — in gleicher Reihenfolge genommen — dasselbe Doppelverhältniss* $\varDelta$ *bilden, so ist der Ort dieser Punkte eine* C^4.

C^4 ist der Schnitt einer Regelfläche vierten Grades — R^4 — mit der Ebene der Reciprocität. Wir construiren dieselbe, indem wir über B^2 den Cylinder B_y^2 errichten. (Fig. 1 axonometrisch.) Dieser wird von der Ebene $\hat{c_1 a}$ in einem Kegelschnitt S^2 getroffen. Dann ist R^4 der Ort

*) Vgl. die Abhandlung: Ueber eine ebene Reciprocität, insbesondere Nr. 7.

aller Geraden, die S^2, c_2 und *die* Gerade n_p schneiden, welche in P zur Ebene der Reciprocität senkrecht steht. C^4 geht durch die Punkte, in denen S^2 die Ebene der Reciprocität trifft. Es sind dies zugleich die Schnittpunkte — C_1 C_2 — von a mit B^2. Die Geraden n_{a1}, n_{a2}, in welchen die Ebene C den Cylinder B_y^2 schneidet, liegen auf R^4. Mithin sind die Schnittpunkte — A_1 A_2 — von c mit B^2 auf C^4 gelegen. c_2 und n_p sind Doppellinien von R^4. Folglich sind B und P Doppelpunkte von C^4.

Die Ebene $\widehat{c_1a}$ schneidet R^4 in S^2. Also muss sie mit R^4 noch eine Curve zweiter Ordnung gemein haben. Da S^2 im Allgemeinen weder durch B geht, noch von n_p geschnitten wird, so muss die Curve zweiter Ordnung, welche ausser S^2 noch in der Ebene $\widehat{c_1a}$ liegt, in B und in dem Schnittpunkte — D — von n_p mit $\widehat{c_1a}$ einen Doppelpunkt haben. Also muss diese Curve degeneriren und besteht aus der doppelt zu zählenden Geraden $\overline{BD}$ — sagen wir d. Mithin ist die Gerade d eine Doppellinie von R^4. Die Ebene durch d und c_2 berührt R in B. Also schneidet sie die Ebene der Reciprocität in einer Geraden — b — welche in B die Curve C^4 berührt. Diese Linie kann C^4 — ausser in B — nicht mehr schneiden. Folglich hat sie in B mit C^4 vier Punkte gemein und da sie Tangente in B ist, so folgt, dass in B zwei Doppelpunkte der C^4 zusammenfallen und dass in B die Curve C^4 sich selbst berührt. B *ist ein doppelter Berührungsknoten.*

Bezeichnen wir $\overline{BP}$ mit p, so wird die gegebene Construction von b durch die Relation $(c\,p\,a\,b) = \Delta$ ausgedrückt.

Um die Tangenten an C^4 in P zu construiren, zeichnen wir die Tangentialebenen in diesem Punkte an R^4. Dieselben gehen durch n_p. Legen wir jetzt eine Ebene

durch P und c_2, so schneidet diese R^4 — ausser in c_2 — noch in einem Kegelschnitt, der in P einen Doppelpunkt hat. Ein solcher Kegelschnitt zerfällt in zwei Gerade. Es sind dies die Verbindungslinien des Punktes P mit den Punkten — $S_1 S_2$ — in welchen die Ebene durch c_2 und P den Kegelschnitt S^2 trifft.

Die Normalen aus S_1 und S_2 auf die Ebene der Reciprocität treffen B^2 in zwei Punkten — $B_1 B_2$ — welche auf einer Geraden — b_1 — durch B liegen. Für letztere gilt die Relation $(c\, b_1\, a\, p) = \varDelta$.

Haben wir also nach derselben b_1 bestimmt und zeichnen wir die Schnittpunkte von b_1 mit B^2, so gehen durch diese die Geraden — $p_1\, p_2$ — welche C^4 in p berühren. Es sind diejenigen Linien, welche dem Punkte P in der Reciprocität $(c\, B^2\, a\, \varDelta)$ entsprechen.

Seien $t_1\, t_2$ die Tangenten, welche aus P an B^2 gezogen werden können, so entsprechen ihnen — wie sofort ersichtlich — in der Reciprocität $(C\, B^2\, a\, \varDelta)$ diejenigen Punkte, in denen die Geraden $t_1\, t_2$ die Curve C^4 berühren.

Sei x eine durch B gehende Gerade in der Ebene der Reciprocität, so fragen wir nach den Schnittpunkten von x mit C^4. Zur Beantwortung dieser Frage legen wir eine Ebene durch x und c_2 und construiren die Transversalen zu c_2, n_p und S^2, welche in dieser Ebene liegen. Wir haben also die Schnittpunkte der Ebene durch c_2 und x mit S^2 zu bestimmen. Indem wir diese Punkte mit dem Schnittpunkte der Ebene durch $c_2\, x$ und der Geraden n_p verbinden, erhalten wir die gesuchten Transversalen. Sie treffen x in zwei Punkten von C^4. Wir führen die skizzirte Construktion aus, indem wir zu x eine Gerade x_b nach der Relation $(c\, x_b\, a\, x) = \varDelta$ zeichnen. x_b trifft B^2 in zwei Punkten.

Ihre Verbindungslinien mit P schneiden aus x zwei Punkte von C^4. Drehen wir x um B, so wird durch die Bedingung $(c\,x_b\,a\,x) = \varDelta$ jeder Geraden x eine Gerade x_b zugeordnet; diese Geraden $x\,x_b$ sind Paare einer Projectivität, für welche c und a die Doppelstrahlen sind. Daraus entnehmen wir folgende Erzeugungsweise von C^4:

Gegeben sei ein Kegelschnitt B^2, *eine Projectivität von Strahlen an Scheitel* B *und ein Punkt* P. *Schneidet dann ein Strahl der Projectivität aus* B^2 *die Punkte* $B_1\,B_2$, *so treffen die Verbindungslinien derselben mit* P *den entsprechenden Strahl der Projectivität in zwei Punkten von* C^4.

Durch diese Erzeugung von C^4 ist jedem Punkte von C^4 — ausgenommen B und P — ein Punkt von B^2 zugeordnet. Construiren wir die Tangenten aus B an B^2 und ihre entsprechenden Geraden — $b_1\,b_2$ — in der Projectivität P_{ac}, so sind letztere die Tangenten aus B an C^4.

2.

Sei c_{2x} eine beliebige durch B gezogene Gerade, welche nicht in der Ebene der Reciprocität liegt. Construiren wir dann eine Regelfläche — R^{4x} —, welche c_{2x}, n_p und die oben construirte Curve 4 ter Ordnung zu Leitcurven hat, so ist im Allgemeinen der Grad einer solchen Fläche gleich 8. Er wird in unserem Falle um 4 verringert, weil n_p und c_{2x} die Curve C^4 in Doppelpunkten schneiden. Construiren wir an R^{4x} in B die Tangentialebene — C_{2x} — so geht diese durch c_{2x} und durch die Gerade b, welche C^4 in B berührt. C_{2x} schneidet R^{4x} — ausser in c_{2x} — noch in einem Kegelschnitt. Weil nun b mit C^4 in B vier Punkte gemein hat, so muss dieser Kegelschnitt in B einen Doppelpunkt haben. Ein

zweiter wird der Schnittpunkt — D^x — von n_p mit C_{2x} sein. Also degenerirt der Kegelschnitt in die Gerade $\overline{BD_x}$ — sagen wir d_x — und diese ist eine doppelte Linie von R^{4x}. Jede Ebene durch d^x wird R^{4x} noch in einem Kegelschnitt treffen. Sei C_{1x} eine solche Ebene, welche durch die Gerade a der Reciprocität gehe und R^{4x} in dem Kegelschnitt S^{2x} schneide. Durch c_{2x} legen wir eine Ebene — C_x —, welche zur Ebene der Reciprocität senkrecht steht und diese Ebene in c_x, die Ebene C_{1x} in c_{1x} treffe. Mit $\varDelta_x$ wollen wir die Relation $\frac{\operatorname{tg} c_x c_{1x}}{\operatorname{tg} c_x c_{2x}}$ bezeichnen. Schliesslich construiren wir die Orthogonalprojection — B^{2x} — des Kegelschnittes S^{2x} auf die Ebene der Reciprocität. Damit haben wir eine Raumfigur hergestellt, welche analog der in 1 benutzten ist und auf dem nämlichen Wege wie diese zu Curve C^4 führt. Letztere erscheint jetzt als der Ort der Punkte, welche den Strahlen des Büschels mit dem Scheitel P in der Reciprocität ($c_x B^{2x} a \varDelta_x$) entsprechen.

Bewegt sich c_{2x} in der Ebene C, so gehört zu jeder Lage von c_{2x} eine andere Regelfläche R^{4x}. Die doppelten Geraden d_x dieser Regelflächen liegen in den Ebenen durch b und die resp. c_{2x}. Die Ebenen durch a und diese d_x schneiden aus den resp. Regelflächen R^{4x} die Kegelschnitte S^{2x} und aus der Ebene C die resp. Geraden c_{1x}. Es ist auf diese Weise jeder Geraden c_{2x} eine Gerade c_{1x} zugeordnet und für diese Geradenpaare gilt das nämliche Verhältniss $\frac{\operatorname{tg} c_x c_{1x}}{\operatorname{tg} c_x c_{2x}} = \varDelta_x$. Die Transversalen t der Regelflächen R^{4x} drehen sich um die Punkte von C^4 und liegen in Ebenen durch n_p. Folglich schneiden

diese t die Ebenen durch die d und a resp. in Punkten, welche auf Normalen zur Ebene der Reciprocität liegen*). Mithin befinden sich die Kegelschnitte S^2 auf einem zur letzteren Ebenen senkrechte Cylinder und haben dieselbe Orthogonalprojection B^2. Es führen also die jetzt betrachteten Lagen von c_{2x} zwar zu unendlich vielen Regelflächen R^{4x}, aber zu der nämlichen Reciprocität(c_x B^{2x} $a \Delta_x$). Lassen wir c_{2x} die Ebene C_{2x} durchlaufen, so gehört zu jeder Lage von c_2 eine Regelfläche R^{4x}. d_x ist eine doppelte Gerade für alle diese Flächen. Also schneidet C_{1x} dieselben — ausser in d_x — noch in unendlich vielen Kegelschnitten, deren Orthogonalprojectionen auf die Ebene der Reciprocität unendlich viele Kegelschnitte — B^{2x} — sind. Legen wir dann durch die Geraden c_{2x} die Normalebenen C_x zur Ebene der Reciprocität, so erhalten wir unendlich viele Geradenpaare c_x c_{1x}, welche mit den resp. c_{2x} durch die Bedingung: $\frac{\operatorname{tg} c_x c_{1x}}{\operatorname{tg} c_x c_{2x}} = \Delta_x$ verbunden sein sollen. Wir gelangen so zu unendlich vielen Reciprocitäten (c_x B^{2x} $a \Delta_x$), welche die Linie a gemeinsam haben und deren Kegelschnitte — B^{2x} — sich in 2 Punkten — C_1 C_2 — auf a schneiden.

Drehen wir jetzt die Ebene C_{1x} um d_x, so schneidet jede ihrer Lagen aus den Regelflächen R^{4x} unendlich viele Kegelschnitte S^{2y}. Ihre Orthogonalprojectionen auf die Ebene der Reciprocität sind unendlich viele Kegelschnitte B^{2y}. Zu jedem derselben gehört eine Gerade c'_{2x} in C_{2x} und mithin ein Δ_y. Alle Kegelschnitte B^{2y}, welche zu diesem Δ_y gehören, schneiden sich in zwei

*) In Fig. 2 sind zwei solche Transversalen — t t^* — dargestellt, welche durch den Punkt P_1 von C^4 gehen.

Punkten einer durch B gehenden Geraden a_y. Sie ist die Schnittlinie einer Lage von C_{1x} mit der Ebene der Reciprocität. Es gehören also zu jedem C_{1x} unendlich viele Reciprocitäten ($c_y \, B^{2y} \, a_y \, \Delta_y$).

Lassen wir endlich c_2 sämmtliche Normalebenen zur Ebene der Reciprocität durchlaufen, so wiederholt sich der Gedankengang, welchen wir oben für die Geraden c_2 in der Ebene C_x entwickelten. Wir gelangen zu keinen neuen Reciprocitäten. Damit haben die aber alle möglichen Lagen der Geraden $c_{2.x}$ durch B erschöpft und fassen nun das Gesagte dahin zusammen:

C^4 *liegt auf zweifach unendlich vielen Regelflächen vierter Ordnung, von denen je unendlich viele die doppelten Geraden* n_p *und* d_x *gemeinsam haben. Für je unendlich viele dieser Regelflächen liegt je ein Kegelschnitt auf einem zur Ebene der Reciprocität normalen Cylinder. Jede Gruppe der ersteren Regelflächen führt zu unendlich vielen Reciprocitäten* ($c \, B^2 \, a \, \Delta$). *Jede Gruppe der in zweiter Linie erwähnten Regelflächen führt nur zu einer Reciprocität.* C^4 *correspondirt in diesen zweifach unendlich vielen Reciprocitäten den Strahlen eines Büschels mit dem Scheitel* P.

3.

Wir wenden uns dazu, die gegenseitige Abhängigkeit der Bestimmungsstücke unserer Reciprocitäten zu untersuchen. Zunächst ergibt sich aus der Herleitung der *Kegelschnitte* B^2, *dass jeder derselben vier Punkte von* C^4 *enthält, welche paarweise auf Geraden durch* B liegen.

Unter 1 haben wir gesehen, dass die Tangenten — $t_1 \, t_2$ — aus P an C^4 den dort benutzten Kegelschnitt B^2 berührten. Lassen wir jetzt an seine Stelle irgend einen der Kegelschnitte B^2 treten, welche wir oben ab-

leiteten, so erhalten wir aus ihm durch Vermittlung einer Reciprocität (c B^2 a Δ) dieselbe Curve vierter Ordnung wie unter 1. Sie hat also die nämlichen Tangenten aus P und daraus folgt, *dass sämmtliche Kegelschnitte* B^2 *von den Geraden* $t_1 t_2$ *berührt werden.*

Seien B_1 B_2 zwei Punkte eines Kegelschnittes B^2, welche auf einer Geraden x durch B liegen. Dann befinden sich in den Geraden PB_1 PB_2 zwei Punkte — P_1P_2 — von C^4, welche auf einer Geraden x_1 durch B gelegen sind (1). Sollen wir die nämlichen Punkte P_1 P_2 unter Benutzung eines anderen Kegelschnittes — sagen wir B^{2x} — erhalten, so muss $\overline{PB_1}$, $\overline{PB_2}$ aus B^{2x} zwei Punkte — B_{1x} B_{2x} — schneiden, deren Verbindungslinie durch B geht. Lassen wir an Stelle von x eine der Tangenten an B^2 treten, so folgt: *Die Berührungspunkte der Tangenten aus B an die Kegelschnitte* B^2 *liegen auf zwei Geraden durch* P.

Zur Construction der Tangente b in B an C^4 haben wir unter 1 die Relation $(c\,p\,a\,b) = \Delta$ abgeleitet. Dieselbe Linie b müssen wir erhalten, wenn wir C^4 mit Hülfe irgend einer der Reciprocitäten (c B^2 a Δ) zeichnen. Es werden daher für alle Reciprocitäten, welche das nämliche Doppelverhältniss Δ haben, die Geraden a und c in der erwähnten Abhängigkeit von p und b stehen. Wir schliessen daraus:

Die Geraden a und c der Reciprocitäten von gleichem Doppelverhältniss Δ bilden eine Projectivität, für welche b und p die Doppelstrahlen sind.

Sei die Curve C^4 gegeben und betrachten wir irgend zwei Gerade durch B als a und c einer Reciprocität, so wird ihr Doppelverhältniss durch die Bedingung $(c\,p\,a\,b) = \Delta$ bestimmt. Zu C^4, a, c, Δ gehört ein Kegelschnitt B^2. Der-

selbe geht durch die Schnittpunkte von a und c mit C^4 und hat $t_1 t_2$ zu Tangenten. Nun waren a und c beliebig gewählte Gerade durch B. Es folgt also:

Durch vier Punkte von C^4, *welche auf zwei Geraden aus* B *liegen, geht ein Kegelschnitt* B^2 oder: *Construiren wir auf den Geraden durch* P *zu den Schnittpunkten* — $P_c P_a P_1$ — *mit* c, a, C^4 *diejenigen Punkte* B, *für welche* $(P_c B P_a P_1) = \varDelta$ *ist, so liegen diese auf einem Kegelschnitt.*

Seien $h_1 h_2$ zwei Gerade durch P, welche B^2 in den resp. Punkten B_{h_1} B_{h_2} treffen. Auf den Geraden durch diese Punkte und P sollen die Punkte P_{h_1} P_{h_2} von C^4 liegen, für welche $(P_{c_1} B_{h_1} P_{a_1} P_{h_1}) = \varDelta = (P_{c_2} B_{h_2} P_{a_2} P_{h_2})$. Dabei seien $P_{c_1} \ldots P_{a_1} \ldots$ die Schnittpunkte von $h_1 h_2$ mit a und c. Wir wollen $B_{h_1} P_{h_1}$, $B_{h_2} P_{h_2}$ zugeordnete Punkte von B^2 und C^4 nennen. Dann folgt aus der angeführten Relation, dass die Punkte P_{c_1} P_{c_2}, B_{h_1} $B_{h_2} \ldots$ projective Reihen auf $h_1 h_2$ bilden. Also sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser Reihen — d. h. c, $\overline{B_{h_1} B_{h_2}}$, a $\overline{P_{h_1} P_{h_2}}$ Tangenten eines Kegelschnittes, der von h_1 h_2 berührt wird. Bezeichnen wir die Geraden $\overline{B_{h_1} B_{h_2}}$ und $\overline{P_{h_1} P_{h_2}}$ als Sehnen von B^2 und C^4, welche in der Reciprocität $(c B_2 a \varDelta)$ einander zugeordnet sind, so können wir das jetzt Bewiesene dahin aussprechen:

Zwei Sehnen des Kegelschnittes B^2 *und der Curve* C^4, *welche in der Reciprocität* $(c B^2 a \varDelta)$ *einander zugeordnet sind, umhüllen mit den Geraden durch* P, *welche die zugeordneten Punkte dieser Sehnen verbinden und mit* a *und* c *einen Kegelschnitt.*

Kennen wir P, B, B^2 und ein Punktepaar B_{h_1} P_{h_1}, so können wir nach diesem Satze auf lineare Weise die Punkte construiren, welche auf einer Geraden — x — durch B liegen. Treffe x den Kegelschnitt B^2 in B_h^2, so

zeichnen wir durch P_{h_1} die Tangente eines Kegelschnittes, welche von a, c, $\overline{B_{h_1} B_{h_2}}$, $\overline{P B_{h_1}}$ und $\overline{P B_{h_2}}$ berührt wird. Sie schneidet x in einem Punkte von C^4.

Specialisiren wir den zuletzt hervorgehobenen Satz für die Tangenten, welche durch P an C^4 gehen, so folgt:

Die Tangenten aus P *an* C^4 *umhüllen mit den Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte an* C^4 *und an einen Kegelschnitt* B^2 *und mit a und c einen Kegelschnitt.*

Tritt an Stelle der Sehnen $\overline{B_{h_1}\ B_{h_2}}$ die Tangente in B_{h_1} an B^2, so geht $\overline{P_{h_1} P_{h_2}}$ in eine Tangente in P_1 an C^4 über. Aus den Geraden $h_1 h_2$ wird eine Tangente h_1, welche in P ihren Berührungspunkt hat und wir sagen:

Sind B_{h_1} P_{h_2} *zugeordnete Punkte in der Reciprocität* ($c\,B^2\,a\,\varDelta$), *so umhüllen die resp. Tangenten in ihnen an* B^2 *und* C^4 *mit a und c einen Kegelschnitt, der in* P *von* h_1 *berührt wird.*

Mit Hülfe dieses Satzes können wir auf lineare Weise die Tangente in P_{h_1} an C^4 zeichnen. Er versagt, wenn im Punkte C_1 auf a die Tangente gezeichnet werden soll. Dann construiren wir die Tangentialebene an R_4 in C_1. (Fig. 3.) Zu diesem Zwecke ziehen wir die Transversale t durch C_1 zu n_p und c_2. Weiter zeichnen wir die Tangente — t_b — in C_1 an B^2. Durch letztere legen wir zur Ebene der Reciprocität eine Normalebene. Sie trifft die Ebene durch $\bar{c}_1$ und a in einer Geraden — s — welche in C_1 den Kegelschnitt S^2 berührt, den die Ebene durch c_1 und a aus R^4 schneidet. Mithin muss die Ebene durch die Geraden t und s die Fläche R^4 in C_1 berühren und aus der Ebene der Reciprocität eine Gerade — t_c — schneiden, welche in C_1 Tangente an C^4 ist. Bezeichnen wir die Orthogonalprojection von t auf die Ebene der Reciprocität — also die Gerade $\overline{P\,C_1}$ — mit p_c, so können

wir die skizzirte Construction von t_c durch die Relation $(p_c\, t_b\, a\, t_c) = \varDelta$ ausdrücken. In analoger Weise erhalten wir die Tangenten in C_2. Handelt es sich darum, die Tangenten in $A_1\, A_2$ — den Schnittpunkten von c mit C^4 — zu finden, so betrachten wir letztere Gerade als Linie a einer Reciprocität $(c\, B^2\, a\, \varDelta^*)$, bestimmen dem entsprechend $\varDelta^*$ und construiren dann die Tangenten in analoger Weise, wie dies jetzt bei den Punkten $C_1\, C_2$ geschehen ist.

4.

Wir heben unter den Reciprocitäten $(C\, B^2\, a\, \varDelta)$ diejenigen hervor, für welche $\varDelta = 2$ ist. Bei ihnen bilden b, p mit den Geraden $a\, c$ harmonische Gruppen.

Sei B_2^2 ein Kegelschnitt einer solchen Reciprocität, so erhalten wir (vgl. 1) die Tangenten — $p_1\, p_2$ — in P an C^4, indem wir eine Gerade b_1 nach der Bedingung $(c\, b_1\, a\, p) = 2$ zeichnen. Letztere sagt aber aus, dass p und b_1 mit a und c eine harmonische Gruppe bildet. Also muss b_1 mit der oben erwähnten Geraden b zusammenfallen. Verbinden wir die Punkte, in denen b den Kegelschnitt B_2^2 schneidet, mit P, so erhalten wir $p_1\, p_2$. Nun müssen wir stets zu denselben Tangenten b, $p_1 p_2$ gelangen, welchen Kegelschnitt B^2 wir auch benutzen. Wir schliessen also:

Sämmtliche Kegelschnitte B^2 *der Reciprocitäten, für welche* $\varDelta = 2$ *ist, gehen durch die Schnittpunkte von* b *mit* $p_1\, p_2$.

Specialisiren wir das, was am Ende von 1 gesagt wurde, für $\varDelta = 2$, so geht die Projectivität P_{ac} in Involution über und wir sagen:

Verbinden wir die Punkte, in denen ein Strahl einer Involution einen Kegelschnitt B^2 *trifft, mit einem beliebigen*

Punkte P, *so schneiden diese Verbindungslinien den entsprechenden Strahl in zwei Punkten einer* C^4.

Sei E_1 ein gemeinsamer Punkt von C^4 und B_2^2, welcher nicht in a oder c liegt, so schneidet die Gerade $\overline{PE_1}$ — sagen wir e — aus B_2^2 einen zweiten Punkt E_2 und aus a und c die resp. Punkte P_a, P_c. Dann muss in der Reciprocität $(c\,B^2\,a\,2)$ dem Punkte E_2 von B_2^2 der Punkt E_1 von C^4 zugeordnet sein, d. h. $(P_c\,E_2\,P_a\,E_1) = 2$. Aus dieser Relation folgt aber, dass auch $(P_c\,E_1\,P_a\,E_2) = 2$ ist. Mithin muss E_2 ein Punkt von C^4 sein, welcher dem Punkte E_1 von B_2^2 zugeordnet ist, d. h. E_2 ist ebenfalls ein gemeinsamer Punkt von B_2^2 und C^4. Analoge Schlüsse zeigen uns, dass zwei weitere gemeinsame Punkte von B_2^2 und C^4 auf einer Geraden — f — durch P liegen. Wir folgern also:

Die Kegelschnitte B_2^2, *welche zu den Reciprocitäten gehören, deren* $\varDelta$ *gleich 2 ist, haben ausser den Punkten in* a *und* c *mit* C^4 *noch vier Punkte gemeinsam, welche paarweise auf Geraden durch* P *liegen.*

Seien $F_1\,F_2$ die gemeinsamen Punkte von C^4 und B_2^2, welche in f gelegen sind, so folgt aus dem unter 3 Bewiesenen, dass $e\,f\,a\,c$ mit den Geraden $E_1\,F_1$, $E_2\,F_2$ einen Kegelschnitt umhüllen. Ein zweiter Kegelschnitt hat $e\,f\,a\,c$ und $E_1\,F_2$, $E_2\,F_1$ zu Tangenten.

Für die Construction der Tangenten an C^4 in den Schnittpunkten von a und c mit B_2^2 folgt (3):

In den auf a *und* c *liegenden Schnittpunkten von* C^4 *mit* B_2^2 *bilden die Tangenten an* C^4 *und* B_2^2 *mit den Geraden nach* B *und* P *harmonische Gruppen.*

5.

Sei g eine beliebige Gerade der Ebene, so fragen wir nach den Schnittpunkten von g mit C^4.

Um diese zu finden, ziehen wir durch B eine Gerade c_2, welche nicht in der Ebene der Reciprocität liegt. Dann denken wir uns eine Regelfläche — R^4 — construirt, welche zu dieser Geraden c_2 gehört, d. h. wir fixiren eine Reciprocität ($c\,B^2\,a\,\varDelta$), in welcher C^4 den Strahlen eines Büschels mit dem Scheitel P correspondirt. Weiter zeichnen wir ein Hyperboloid H^2, welches durch die Geraden g, c_2 und n_p bestimmt wird. Nun schneidet die Ebene, welche durch a und die Doppellinie d von R^4 geht, aus letzterer Fläche einen Kegelschnitt S^2 und aus dem Hyperboloid H^2 einen Kegelschnitt H^2. Durch die gemeinsamen Punkte von S^2 und H^2 gehen vier Transversalen zu c_2, n_p und g, welche auf R^4 und H^2 liegen. Diese schneiden g in vier Punkten von C^4. Zur Durchführung dieser Construction bestimmen wir die Orthogonalprojectionen von S^2 und H^2 auf die Ebene der Reciprocität. Die Projection von S^2 ist der Kegelschnitt B^2 der Reciprocität ($c\,B^2\,a\,\varDelta$). Die Projection — H^2_g — von H^2 erhalten wir durch folgende Ueberlegung: Sei t eine Transversale zu $c_2\,n_p$ und g und schneide diese aus der Ebene $\hat{ad}$ den Punkt D von H^2, so erzielen wir durch D zur Ebene der Reciprocität eine Normale. Ihr Fusspunkt — D_1 — liegt auf H^2_g. Die Orthogonalprojection — t_1 — von t geht durch D_1 und wenn ihre resp. Schnittpunkte mit g, a, c durch $P_g\,P_a\,P_c$ bezeichnet werden, so können wir die dargelegte Construction von D_1 durch die Relation ausdrücken: $(P_c\;D_1\;P_a\;P_g) = \varDelta$ oder $(P_a\;P_g\;P_c\;D_1) = \varDelta$. Da diese Relation für alle Punkte von H^2_g gilt, welche auf Geraden durch P liegen, können wir schliessen, dass H^2_g der Kegelschnitt ist, welcher den Strahlen des Büschels durch P in der Reciprocität ($a\;g\;c\;\varDelta$) correspondirt. Daraus

folgt, dass Hg^2 durch die Schnittpunkte der Geraden $a\,g\,c$ geht.*)

Ist E ein gemeinsamer Punkt von B^2 und H_g^2, so repräsentirt er die Orthogonalprojection eines gemeinsamen Punktes von S^2 und H^2. Also ist die Gerade $\overline{EP}$ die Orthogonalprojection einer gemeinsamen Transversalen von R^4 und H^2 und trifft mithin g in einem Punkte von C^4.

Nimmt g alle möglichen Lagen in der Ebene der Reciprocität an, so gehört zu jedem g ein Kegelschnitt Hg^2 resp. ein Hyperboloid H^2. Auf allen diesen Hyperboloiden liegt n_p und c_2. Mithin gehen alle Kegelschnitte H_g^2 durch P und B. Eine weitere Gerade, welche allen Hyperboloiden H^2 angehört, ist die Verbindungslinie BP oder p. Also werden diese Hyperboloide von der Ebene durch c_2 und p in B berührt. Diese schneidet die Ebene $\hat{a\,d}$ in einer Geraden, welche in B sämmtliche Kegelschnitte H^2 tangirt. Ihre Orthogonalprojection — b — muss somit alle Kegelschnitte H_g^2 in B berühren. Nach der gegebenen Construction wird sie durch die Bedingung $(c\,b\,a\,p) = \Delta$ bestimmt, d. h. sie ist die Tangente in B an C^4.

Wir sehen aus dem Gesagten, dass die Kegelschnitte H_g^2 ein specielles Netz von der Art bilden, dass alle durch P gehen und sich in B berühren. Sie stehen mit den Geraden der Ebene in der Beziehung einer quadratischen Transformation. Jeder Kegelschnitt H_g^2 trifft a und c — ausser in B — noch je in einem Punkte. Die Verbindungslinie dieser Punkte ist die zu H_g^2 zugeordnete Gerade g.

Der Kegelschnitt H_g^2, welcher a und c zu Asym-

---

*) Vgl. Ueber eine ebene Reciprocität Nr. 7.

ptotenrichtungen hat, correspondirt der unendlich fernen Geraden der Ebene. Bestimmen wir seine Schnittpunkte mit B^2, so liegen auf den Geraden aus P nach diesen Schnittpunkten die unendlich fernen Punkte von C^4.

Berührt H^2_g den Kegelschnitt B^2, so ist die zugeordnete Gerade g eine Tangente an C^4.

Es erscheint somit C^4 *als Enveloppe aller der Sehnen, welche die Geraden a und c aus den Kegelschnitten* H^2_g *schneiden, die* B^2 *berühren.*

Verbinden wir im letzteren Falle den Berührungspunkt von B^2 und H^2_g mit P, so schneidet diese Verbindungslinie aus g den Berührungspunkt dieser Geraden mit C^4.

Haben wir speciell C^4 aus einem Kegelschnitt B^2_2 abgeleitet und sei B_1 P_1 ein zugeordnetes Punktepaar von B^2 und C^4, so wird dasselbe durch a und c harmonisch getrennt. Mithin bilden a und c mit den Geraden BB_1 und PP_1 eine harmonische Gruppe. Ist dann b_1 die Tangente in B_1 an B^2, so construiren wir einen Kegelschnitt H^2_g, der von b in B und von b_1 in B_1 berührt wird und durch P geht. Er schneidet a und c in zwei Punkten, deren Verbindungslinie die Tangente p_1 in P_1 an C^4 ist. Diese Punkte — A, C — bilden mit P_1 und dem Schnittpunkte — S — von p_1 und BB_1 eine harmonische Gruppe. Daraus folgt, dass die Polare von S in Bezug auf H^2_g durch P_1 geht. Zeichnen wir jetzt einen Kegelschnitt — H^2_t — der H^2_g in B und B_1 berührt, so hat der Punkt S in Bezug auf H^2_t dieselbe Polare wie in Bezug auf H^2_g. Setzen wir fest, dass H^2_t durch P_1 gehen soll, so folgt aus dem Gesagten, dass p_1 die Tangente in P_1 an H^2_t ist.

Wir schliessen daher:

Sind $B_1 P_1$ *zwei in einer Reciprocität* $(c B^2_2 a 2)$ *zugeordnete Punktepaare von* B^2 *und* C^4, *so berührt der Kegelschnitt durch* $b B$, $b_1 B_1$ *und* P_1 *die Curve* C^4 *in* P_1.

6.

Die Kegelschnitte H^2_g, welche in der erwähnten quadratischen Transformation den Geraden durch einen Punkt — sagen wir T — correspondiren, schneiden sich in einem Punkte T_1, d. h. sie bilden ein Büschel. Trifft nämlich $\overline{PT}$ die Geraden a und c in den Punkten $P_a P_c$, so wird T_1 durch die Relation: $(P_a\, T\, P_c\, T_1) = \varDelta$ bestimmt. Handelt es sich darum, die Tangenten zu finden, welche aus T an C^4 gezogen werden können, so haben wir diejenigen Kegelschnitte H^2_g durch T_1 zu zeichnen, welche den Kegelschnitt B^2 berühren. Ihre Zahl ist sechs. Dem entsprechend gibt es sechs Tangenten durch T an C^4, d. h. *letztere Curve ist von der sechsten Classe.*

Soll g eine Doppeltangente an C^4 sein, so muss der Kegelschnitt H^2_g, welcher zu g gehört, den Kegelschnitt B^2 doppelt berühren. Unter den Kegelschnitten eines Netzes gibt es im Allgemeinen vier, welche einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren. *Also hat* C^4 *vier Doppeltangenten.*

Von diesen fallen zwei in b zusammen. Die anderen zwei erhalten wir, indem wir die zwei Kegelschnitte H^2_g construiren, welche b in B tangiren, durch P gehen und B^2 doppelt berühren. Diese Construction — eine Specialisirung der allgemeinen Construction, welche die Kegelschnitte eines Netzes finden lehrt, die einen Kegelschnitt doppelt berühren — lässt sich in folgender Weise durchführen: Wir betrachten die Punkte B und P auf p als Doppelpunkte einer Punkteinvolution. Dann bestimmen

wir die Involution harmonischer Pole in p in Bezug auf B^2. Beide Involutionen haben ein gemeinsames Paar — G H. Nun zeichnen wir in b die Involution harmonischer Pole — J_b — in Bezug auf B^2. Den Punkt B betrachten wir als zusammenfallendes Paar von Doppelpunkten einer parabolischen Involution auf b. Dann haben die beiden letzterwähnten Involutionen in B und dem entsprechenden — B_1 — zu B in der Involution J_b ein gemeinsames Paar. Ziehen wir jetzt B_1 g, B_1 H, so sind diese Geraden die gemeinsamen Sehnen zwischen B^2 und den zwei gesuchten Kegelschnitten H_g^2. Letztere schneiden a und c in Punkten, deren resp. Verbindungslinien die Doppeltangenten — d_1 d_2 — von C^4 sind. Ihre Berührungspunkte liegen auf Geraden, welche wir aus P nach den resp. Berührungspunkten der zwei Kegelschnitte H_g^2 mit B^2 ziehen können.

d_1 d_2 sind stets reell, weil die Geraden a und c jeden Kegelschnitt H_g^2 in B reell schneiden und folglich ein zweites Mal reell schneiden müssen. Dagegen können die Berührungspunkte dieser Doppeltangenten imaginär werden. Dies wird für den Fall, dass B_1 G, B_1 H reell sind, stets dann eintreten, wenn eine dieser Geraden oder beide den Kegelschnitt B^2 imaginär schneiden. Projiciren wir diese Schnittpunkte aus P auf die resp. Doppeltangenten, so erhalten wir in denselben conjugirt imaginäre Berührungspunkte. Sind aber B_1 G, B_1 H imaginäre Gerade mit dem reellen Scheitel B, so schneiden sie B^2 in nicht conjugirten imaginären Punkten, deren Projectionen aus P auf die Doppeltangenten ihre Berührungspunkte sind.

7.

Wir wenden uns zu den Fällen, in welchen unsere betrachtete Curve vierter Ordnung einen speciellen Charakter hat.

a) Wir nehmen an, *dass a die unendlich ferne Gerade der Ebene sei.* Construiren wir dann eine Curve C^4 aus einem Kegelschnitt B^2 mit Hülfe einer Reciprocität, deren $\varDelta = 2$ ist, so muss auf einer Geraden durch P die Bedingung $(P_c P_b P_a P_1) = \varDelta$ erfüllt werden. Liegt nun P_a unendlich ferne, so halbirt P_c die Strecke $P_b P_1$. Wir können dann die Erzeugung von C^4 dahin fassen:

Gegeben sei ein Kegelschnitt B^2, *eine Gerade c und ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel* P. *Tragen wir den Abstand der Punkte, in welchen die Strahlen dieses Büschels die Gerade c und den Kegelschnitt* B^2 *schneiden, von den Punkten in c aus je auf die entgegengesetzte Seite ab, so erhalten wir eine* C^4 *(Fig. 12).*

Diese hat im unendlich fernen Punkte von c einen doppelten Berührungsknoten. Seine Tangente — b — ist parallel c und liegt in der Mitte von P und c. P ist ein Doppelpunkt von C^4. Seine Tangenten gehen durch die Schnittpunkte von b mit B^2.

Wir haben oben gesehen, dass es unendlich viele Kegelschnitte B^2 gibt, aus denen C^4 in einer Reciprocität $(c\,B^2\,a\,2)$ abgeleitet werden kann. Indem wir diese Bemerkung in unserem speciellen Falle berücksichtigen und mit p die Gerade bezeichnen, welche durch P geht und zu c parallel ist, sagen wir: *Sei* c_1 *und* a_1 *ein Geradenpaar, das mit b und p eine harmonische Gruppe bildet und construiren wir auf Geraden durch* P *zu den Punkten von* C^4 — *ausgenommen* P — *die vierten harmonischen in Bezug auf die Schnittpunkte mit* a_1 *und* c_1, *so liegen diese vierten harmonischen auf einem Kegelschnitt* B_1^2.

Analoge Sätze erhalten wir, wenn wir für ein unendlich fernes a die Curve C^4 in den Reciprocitäten $(c\,B^2\,a - 1)$ und $(c\,B^2\,a\,\frac{1}{2})$ ableiten. Im ersteren Falle ist C^4 der Ort

der Mittelpunkte der Strecken, welche die Strahlen durch P aus c und B^2 schneiden. Im zweiten Falle wird C^4 erhalten, wenn wir diese Strecken von den Punkten auf B^2 aus nach der entgegengesetzten Seite hin abtragen. Ist B^2 ein Kreis, so gehen die jetzt besprochenen Curven vierter Ordnung durch die imaginären Kreispunkte.

b) C^4 sei aus einem Kegelschnitt B^2 in einer Reciprocität ($c B^2 a\, 2$) abgeleitet. Ist wieder — wie oben — b die Tangente in B an C^4, so kann b den Kegelschnitt B^2 berühren. Dann fallen in der Geraden, welche den Berührungspunkt mit P verbindet, die zwei Tangenten in P an C^4 zusammen. P ist also eine Spitze von C^4. *Diese Curve hat mithin einen doppelten Berührungsknoten und eine Spitze.*

Specialisiren wir für diesen Fall die gegebene Construction der Doppeltangenten an C^4, so ergibt sich, dass die hierbei auftretenden Kegelschnitte H^2_g degeneriren. Ein Theil derselben ist b; der andere besteht je aus einer der Tangenten, welche von P aus an B^2 gelegt werden können. Letztere Tangenten sind also als zwei Doppeltangenten von C^4 zu betrachten.

Liegt P auf einer Tangente, welche in einem Schnittpunkte von b mit B^2 letzteren Kegelschnitt berührt, so hat diese Tangente in P mit C^4 vier benachbarte Punkte gemein. Sie ist also eine Inflexionstangente in P an C^4.

Ist P der Pol von b in Bezug auf B^2, so sind die Geraden, welche P mit den Schnittpunkten von b und B^2 verbinden, Tangenten aus P an B^2. Jede derselben hat folglich in P mit C^4 vier benachbarte Punkte gemein d. h. sie ist Inflexionstangente in P an C^4. *Diese Curve hat mithin einen doppelten Berührungsknoten und einen doppelten Inflexionsknoten.*

P und b ist in diesem Falle Pol und Polare für alle Kegelschnitte, aus denen sich C^4 mit Hülfe einer Reciprocität ($c\,B^2\,a\,2$) ableiten lässt. Da diese Kegelschnitte sich überdies in zwei Punkten von b schneiden, so folgt, dass sie alle in diesen Punkten von den in Rede stehenden Inflexionstangenten berührt werden. Letztere sind reell, wenn P in dem Theile der Kegelschnitte B^2 liegt, für welchen alle Involutionen harmonischer Polaren hyperbolisch sind. Dann schneiden sich in P zwei reelle Aeste von C^4. Liegt aber P im anderen Theile der Kegelschnitte B^2, so ist P ein isolirter Punkt von C^4.

Nehmen wir an, dass in dem zuletzt besprochenen Fall b die unendlich ferne Gerade sei, so sind a und c zu einander parallel und P liegt in der Mitte zwischen diesen Geraden. Daraus ergibt sich folgender Satz:

Gegeben sei ein Kegelschnitt — B^2 — *und ein Paar von parallelen Geraden* — a, c — *welche von einem Punkte* P *gleichweit abstehen. Construiren wir auf den Geraden durch* P *zu den Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt die vierten harmonischen in Bezug auf die Schnittpunkte mit* a *und* c, *so ist der Ort dieser vierten harmonischen eine* C^4 *(Fig. 13).*

Diese hat den unendlich fernen Punkt der Geraden a zum doppelten Berührungknoten.

Ist P der Mittelpunkt des Kegelschnittes B^2, so ist er der Pol von b und also für C^4 ein doppelter Inflexionsknoten. Seine Tangenten sind die Asymptoten von B^2.

Alle Kegelschnitte B^2, aus denen die letzte C^4 in einer Reciprocität ($c\,B^2\,a\,2$) abgeleitet werden kann, haben dieselben Asymptoten, d. h. sie sind zu einander ähnlich. Wir schliessen daraus: *Seien* $a_1\,c_1$ *zwei Gerade, welche zu* a *parallel sind und von* P *gleichweit abstehen, und con-*

struiren wir auf den Geraden durch P *zu den Punkten von* C^4 — *ausgenommen* P, B — *in Bezug auf die Schnittpunkte mit* a_1 *und* c_1 *die vierten harmonischen, so liegen diese auf einem Kegelschnitt, der zum Kegelschnitt* B^2 *ähnlich ist.*

8.

Wir betrachten nun die degenerirten Formen unserer Curve vierter Ordnung.

a) Der Punkt P *liege auf einem Kegelschnitt einer Reciprocität* ($c\,B^2\,a\,\Delta$).

Construiren wir in derselben zu den Strahlen durch P die entsprechenden Punkte, so liegt auf jeder Geraden durch P ein Punkt P_1, für welchen die Relation

$$(P_c\,P\,P_a\,P_1) = \Delta$$

gilt. Also sind alle diese Punkte P_1 auf einer Geraden b gelegen, welche durch die Bedingung $(c\,p\,a\,b) = \Delta$ bestimmt wird. Mithin werden die übrigen Punkte, welche in der Reciprocität ($c\,B^2\,a\,\Delta$) den Geraden durch P entsprechen, auf einer Curve dritter Ordnung — C^3 — liegen. Zur näheren Untersuchung dieser Curve gehen wir auf die Regelfläche vierter Ordnung — R^4 — zurück, welche in der Reciprocität ($c\,B^2\,a\,\Delta$) zur Curve C^4 gehört. Die Leitcurven von R^4 waren c_2, n_p und der in der Ebene $\hat{a\,c_1}$ liegende Kegelschnitt S^2. Liegt P auf B^2, so muss n_p den Kegelschnitt S^2 schneiden. Also besteht ein Theil von R^4 aus der Ebene, welche durch c_2 und den Schnittpunkt — D — von n_p mit S^2 geht. Der Rest dieser Fläche ist mithin eine Regelfläche dritter Ordnung — R^3. Diese wird von der Ebene der Reciprocität in C^3 geschnitten. n_p ist eine doppelte Gerade von R^3. Also ist P ein Doppelpunkt von C^3. Wir erhalten seine Tangenten,

indem wir eine Gerade b_1 nach der Relation $(c\,b_1\,a\,p) = \varDelta$ construiren. b_1 schneidet B^2 in zwei Punkten. Ihre Verbindungslinien mit P sind die Tangenten in P an C^3. Auf R^3 liegt die Gerade $\overline{BD}$. Durch sie und c_2 geht eine Ebene, welche R^3 in B berührt. Diese schneidet die Ebene der Reciprocität in b. Also ist b Tangente in B an C^3.

Ziehen wir in P die Tangente t an B^2, so liegt auf ihr ein Punkt — P_1 — von C^3, welcher nach der Relation $(P_c\,P\,P_a\,P_1) = \varDelta$ bestimmt wird. Er ist somit der Schnittpunkt von b mit t. Alle Kegelschnitte B^2, aus denen sich C^3 ableiten lässt, müssen durch P gehen und in diesem Punkte t berühren. Diejenigen unter ihnen, welche zu Reciprocitäten gehören, deren $\varDelta = 2$ ist, gehen überdies durch zwei feste Punkte von b. Berührt b diese Kegelschnitte, so ist P eine Spitze von C^3. Liegt P auf der Tangente t, so fallen in B drei benachbarte Punkte von C^3 zusammen d. h. b ist in B Inflexionstangente.

Nehmen wir an, dass a die unendlich ferne Gerade sei, so erhalten wir folgende Darstellung von C^3:

Gegeben sei ein Kegelschnitt B^2 *und eine Gerade c. Ziehen wir durch einen Punkt* P *des Kegelschnittes Strahlen und construiren wir die Mitten der Strecken, welche zwischen c und dem zweiten Schnittpunkte* B *mit dem Kegelschnitt liegen oder tragen wir diese Strecken von c oder von* B *aus in entgegengesetzter Richtung ab, so erhalten wir Curven dritter Ordnung, welche in* P *einen Doppelpunkt haben.*

b) Der Punkt B^2 *liege auf einem Kegelschnitt einer Reciprocität* $(c\,B^2\,a\,\varDelta)$.

Betrachten wir dann eine der Regelflächen R^4, welche in der Reciprocität $(c\,B^2\,a\,\varDelta)$ zur Curve C^4 gehören, so

schneiden sich die Leitcurven S^2 und c_2 von R^4 in B. Mithin zerfällt R^4 in die Ebene, welche durch B und n_p geht und in eine Regelfläche dritter Ordnung — R^3. Also besteht ein Theil von C^4 aus der Geraden B P und der Rest ist eine Curve dritter Ordnung. c_2 ist eine doppelte Gerade von R^3. Also ist B ein Doppelpunkt an C^3.

Schneidet die Ebene des Kegelschnittes S^2 die Gerade n_p in D, so ist $\overline{BD}$ eine Gerade von R^3.

Folglich muss die Ebene, welche durch c_2 und D geht, in B die Fläche R^3 berühren und die Ebene der Reciprocität in einer Tangente — b — von C^3 schneiden. Es ist $(c\,p\,b\,a) = \Delta$.

Die zweite Tangente im Doppelpunkte B von C^3 erhalten wir, indem wir durch c_2 und die Gerade, welche in B den Kegelschnitt S^2 berührt, eine Ebene legen. Diese tangirt R^3 in B und schneidet die Ebene der Reciprocität in der gesuchten Tangente. Bezeichnen wir dieselbe mit t_1 und sei t die Tangente, welche in B den Kegelschnitt B^2 berührt, so erhalten wir t_1 nach der Relation $(c\,t\,a\,t_1) = \Delta$.

n_p ist eine Gerade von R^3. Also ist P ein Punkt von C^3. Seine Tangente geht durch den zweiten Schnittpunkt von b mit denjenigen Kegelschnitten B^2, welche zu Reciprocitäten gehören, deren $\Delta = 2$ ist. Berührt b diese Kegelschnitte B^2, so muss $\overline{PB}$ die Curve C^3 in P und B tangiren d. h. $\overline{PB}$ ist ein Theil von C^3 und der Rest dieser Curve ist ein Kegelschnitt, der B^2 in B berührt.

c) Liegen B und P auf einem Kegelschnitt B^2, so trifft S^2 sowohl c_2 wie n_p. Also degenerirt R^4 in zwei Ebenen und eine Regelfläche zweiten Grades — R^2. Mithin zerfällt C^4 in zwei Gerade und einen Kegelschnitt C^2. Dieser geht durch B und P. Seine Tangente in B ist die Gerade t_1, welche aus der Tangente t an B^2 nach der Re-

lation $(c\ t\ a\ t_1) = \varDelta$ gefunden wird. Benützen wir den Kegelschnitt einer Reciprocität, deren $\varDelta = 2$ ist, zur Ableitung von C^2, so geht die Tangente in P an C^2 nach dem zweiten Schnittpunkte von b mit B^2. Berührt b diesen Kegelschnitt, so enthält B P drei Punkte von C^2, ist also ein Theil dieser Curve und der Rest ist eine Gerade.

9.

Zum Schlusse geben wir einige Erläuterungen zu den in Fig. 4—13 dargestellten Formen der besprochenen Curven vierter Ordnung. Dieselben sind alle aus einem Kreise mit Hülfe einer Reciprocität $(c\,B^2\,a\,2)$ abgeleitet.

Die Fig. 4—9 sind so disponirt, dass die dargestellten Curven orthogonal symmetrisch zu p liegen. b und p müssen also zu einander senkrecht stehen und die Winkel zwischen a und c halbiren.

In Fig. 4 ist P als Doppelpunkt angenommen, in welchem sich reelle Aeste von C^4 schneiden. b muss daher den Kegelschnitt B^2 reell schneiden. Die Asymptoten von C^4 erhalten wir in folgender Weise.

Wir construiren den Kegelschnitt $H^2_{g\infty}$, welcher zu der unendlich fernen Geraden gehört. Die Richtungen von a und c sind seine Asymptotenrichtungen. Er geht durch P und hat in B die Gerade b zur Tangente. Von seinen Schnittpunkten mit B^2 sind zwei reell. Verbinden wir diese mit P, so liegen auf diesen Verbindungslinien die zwei reellen unendlich fernen Punkte von C^4. Ihre Tangenten sind die Asymptoten von C^4. Ist also U_1 einer der gemeinsamen Punkte von B^2 und $H^2_{g\infty}$, so erhalten wir die Asymptote a_1, welche P U_1 parallel ist, indem wir den Kegelschnitt H^2_g zeichnen, der in U_1 den Kegelschnitt B^2 berührt. H^2_g geht durch P, tangirt b in B und ist

somit bestimmt. Mit Hülfe des Satzes von Pascal zeichnen wir den zweiten Schnittpunkt von H^2_g mit c. Durch ihn geht a_1.

In Fig. 5 ist P ein isolirter Punkt von C^4.

Die Curve C^4, welche in Fig 6 dargestellt ist, schneidet die unendlich ferne Gerade nicht reell. Zu der Construction einer Doppeltangente von C^4 bemerken wir Folgendes: Mittelst des Hülfskreises H^2 ist ein Paar — resp. ein Punkt G des Paares — gezeichnet, welches sowohl der Involution harmonischer Pole auf p in Bezug auf B^2 angehört, als auch derjenigen Involution, welche die Schnittpunkte von p mit B^2 zu Doppelpunkten hat. Dem Punkte B correspondirt in der Involution harmonischer Pole auf b in Bezug auf B^2 der unendlich ferne Punkt von b. Verbinden wir diesen mit G, so erhalten wir eine Sehne — d — welche B^2 in zwei reellen Punkten schneidet. Ihnen correspondiren zwei Punkte von C^4, in welchen die Doppeltangente d_1 diese Curve berührt. Die zweite Doppeltangente berührt C^4 in einem conjugirt imaginären Punktepaar.

Die in *Fig. 7* gezeichnete C^4 wird vom Kreise B^2 in vier bestimmten imaginären Punkten geschnitten. a und c sind als Doppelstrahlen einer Rechtwinkelinvolution angenommen. Es sind somit jene vier imaginäre Punkte als die Schnittpunkte dieser Doppelstrahlen mit B^2 definirt. Der Kegelschnitt $H^2_{g\infty}$, welcher zur Geraden g_∞ gehört, ist ein durch B und P gehender Kreis. Weil diese Punkte auf einem Durchmesser von B^2 liegen und weil $H^2_{g\infty}$ b in B berührt, so ist $H^2_{g\infty}$ ein zu B^2 concentrischer Kreis. Er schneidet B^2 in den unendlich fernen Kreis-Punkten und C^4 muss durch diese Punkte gehen. Construiren wir — wie bei Fig. 6 — die Doppeltangenten,

so bemerken wir, dass eine derselben die unendlich ferne Gerade ist. C^4 berührt also die Kreispunkte ihrer Ebene.

Fig. 8 und 9 zeigen C^4, zu deren Herleitung die Dispositionen ähnlich wie in Fig. 4 und 5 sind. Nur wurden jetzt a und c als Doppelstrahlen von Rechtwinkelinvolutionen angenommen. Die Kegelschnitte $H^2_{g\infty}$ sind Kreise. Sie schneiden sich auf der unendlich fernen Geraden mit den B^2 in den imaginären Kreispunkten. Also müssen auch die C^4 durch die imaginären Kreispunkte gehen.

Die Curve C^4 von Fig. 10 ist so disponirt, dass sie eine Spitze in P hat. Also berührt b die Kegelschnitte B^2. a und c sind als Doppelstrahlen einer Rechtwinkelinvolution angenommen. Mithin ist H^2_g ein Kreis und C^4 geht durch die imaginären Kreispunkte. B ist ein isolirter Punkt von C^4.

Dies ist auch bei der in *11* dargestellten Curve der Fall. Dieselbe hat überdies in P einen doppelten Inflexionsknoten und berührt einen Kegelschnitt B^2.

In *Fig. 12* ist die Curve C^4 construirt, welche dadurch entsteht, dass wir auf den Durchmessern eines Kreises von den Punkten einer Geraden c aus die Abstände bis zu den Punkten des Kreises in entgegengesetzter Richtung abtragen. Vgl. 7a.) C^4 ist bicircular.

In Fig. 13 ist für einen Kreis B^2 die Curve C^4 gezeichnet, welche nach dem unter 7c) hervorgehobenen Satze erzeugt wird. P und B sind für dieselbe isolirte Punkte.

Notizen.

† Zur Erinnerung an Prof. Balthasar Luchsinger. — Im Beginne dieses Jahres ist unsere Gesellschaft von einem schmerzlichen Verluste betroffen worden durch den Tod ihres langjährigen Mitgliedes, Balthasar Luchsinger, Professor der Physiologie an der Universität, und mit unserer Gesellschaft trauert die Wissenschaft um einen ihrer begeistertsten Anhänger, um einen Forscher von ausgezeichnetem Talent, von seltener Thatkraft und Fruchtbarkeit. In der Blüthe seiner Jahre, inmitten einer reichhaltigen Thätigkeit ist der Verstorbene am 20. Januar dieses Jahres in Meran durch Krankheit dahingerafft worden, nachdem er das Ziel seiner Wünsche nach vielen Kämpfen erreicht hatte: Einen wissenschaftlichen Wirkungskreis der seiner ausserordentlichen Befähigung und seiner bedeutenden Arbeitskraft ungehinderte Bethätigung zu sichern bestimmt war. Die hohe wissenschaftliche Bedeutung des Verstorbenen und seine mannigfaltigen Anregungen zu wissenschaftlichen Bestrebungen in unserer Gesellschaft und in verwandten Vereinigungen rechtfertigen es, hier ein kurzes Bild seines Lebens zu geben.

Balthasar Luchsinger wurde geboren am 6. September 1849 in Glarus, wo er die ersten Schulstufen absolvirte; er besuchte hierauf das Gymnasium in Schaffhausen bis Frühjahr 1868, in welchem Jahre er in Zürich als Mediciner immatriculirt wurde. Diese 4 Studienjahre in Schaffhausen waren glückliche, und vielleicht für Luchsinger bedeutungsvolle; es muss zu jener Zeit am Gymnasium ein ausserordentlich anregender Lehrer der Mathematik gewirkt haben, welcher mit seltener pädagogischer Kraft und Hingabe seine Schüler für sein Fach und für wissenschaftliche Bestrebungen überhaupt zu begeistern wusste und es ist vielleicht daraus zu erklären, dass aus dem Kreis der damaligen Schulkameraden Luchsingers eine Reihe von Professoren der Mathematik oder Naturwissenschaften hervorgingen.

Auch die Universitätsstudien Luchsingers fielen in eine glückliche Zeit, insoweit, als damals eine ganze Reihe grosser naturwissenschaftlicher Principien im Beginn ihrer Entwicklung sich befanden und die Ziele naturwissenschaftlicher Bestrebungen umzugestalten begannen. Es sind hier zu erwähnen die Einführung des Princips der Erhaltung der Energie in alle Zweige der Physik, die Umgestaltung der chemischen Theorien, die Principien der Darwin'schen Theorie und die spectral-analytische Beobachtungsmethode. Luchsinger war ein Student, der seine Studien nicht auf die medicinischen Fachwissenschaften beschränkte, sondern alle Gebiete exacter Wissenschaft und Forschung sich offen halten wollte, und er arbeitete sich mit Macht in die mathematischen, physikalischen, chemischen Studien hinein, und cultivirte gleichzeitig eifrig alle Gebiete der Biologie, indem er die Gegend nach Pflanzen und Thierchen aller Art durchstreifte und als Assistent für Anatomie thätig war. Das erste Examen, welches Luchsinger 1871 bestand, das medicinische Propädeuticum, übertraf denn auch alle Erwartungen und Forderungen und es erschien auch schon in diesen ersten Semestern eine physiologische Arbeit von ihm. Im Frühling 1871 ging Luchsinger für 2 Semester nach Heidelberg, wo er hauptsächlich im physiologischen Laboratorium Kühne's thätig war und wo er auch als fröhlicher Student im Kreise vieler Freunde sich einen Schatz unverlöschlicher Erinnerungen an glückliche Stunden sammelte. Im Frühjahre 1872 kehrte er nach Zürich zurück, um nun seine medicinischen Studien zu vollenden; im Sommer 1873 absolvirte er das Staatsexamen.

Es ist ein hervorragender Characterzug Luchsingers, dass er schon als Student seine lebhaften gesellschaftlichen Bedürfnisse mit wissenschaftlichen Bestrebungen zu vereinigen wusste, und immer einen Verein oder ein physiologisches Colloquium um sich zu versammeln und aufrecht zu erhalten wusste, in welchem wesentlich unter seiner Leitung wissenschaftliche Gegenstände aller Art besprochen wurden. Im Herbst 1872 machte Luchsinger eine schwere Krankheit durch; er wurde während eines physiologischen Colloquiums plötzlich von heftigen Kniegelenkschmerzen befallen, so dass er nach Hause getragen werden

musste und es folgte nun eine heftige schmerzhafte acute Kniegelenkentzündung, welche eine Ankylose hinterliess.

Der Einfluss dieser Erkrankung auf Luchsingers weitere Entwicklung ist verschieden commentirt worden. Aber es ist sicher, dass er weder trotz, noch auch wegen dieser Krankheit Physiologe geworden ist; seine Bestrebungen, sein ganzes Sinnen und Denken war so sehr auf die Wissenschaft um ihrer selbst willen gerichtet, dass es für ihn keines äussern, körperlichen Anstosses bedurfte, um ihn sich für die academische Laufbahn entscheiden zu lassen. Er hat ja schon während seiner Krankheit, im Bett, Abhandlungen geschrieben und nach der Genesung hielten ihn seine Arbeiten ab, so sehr er es wünschte, sich dem Versuch einer Mobilisirung des Kniegelenks zu unterziehen.

Um bei der reinen Wissenschaft zu bleiben, nahm Luchsinger gern die ihm angebotene und für ihn creirte Assistentenstelle für Physiologie an, in welcher er denn auch 5 Jahre lang verblieben ist.

Luchsinger promovirte mit einer Dissertation über die Glycogenbildung in der Leber, im Jahre 1875, also für seine Verhältnisse etwas spät. Es ist dies indessen characteristisch für seine wissenschaftliche Sinnesart: er wollte eine Dissertation von bleibendem wissenschaftlichem Werth liefern und deshalb dehnte er seine Untersuchungen über Glycogenbildung nach allen Richtungen aus, bis ihm seine Resultate der eigenen strengen Kritik zu genügen schienen und dieselben sind denn auch in der Physiologie und Pathologie von bleibendem Werth geblieben. Im gleichen Jahre habilitirte er sich an der medicinischen Facultät und bald darauf wurde ihm neben seiner Assistenz der physiologische Unterricht an der Thierarzneischule übertragen. Er arbeitete nun vollkommen selbstständig in seinem Fach und sein lebhaftes Bestreben wurde es nun, auch eine selbstständige wissenschaftliche Stellung zu erlangen; diesem Bestreben ist vielleicht zum Theil sein Wunsch entsprungen, die Vertreter der physiologischen Wissenschaften und deren Institute persönlich kennen zu lernen; er nahm zu dem Zweck im Herbst 1876 Urlaub und ging für ein Semester nach Leipzig, wo er in Ludwigs Laboratorium bald sich unter den

jungen Gelehrten Freunde erwarb, die ihn schätzen lernten und seine hohe Begabung erkannten, wie auch der Leiter des Instituts, Ludwig selber. Er wurde bei seinem Weggang, wahrscheinlich in Anerkennung seiner belebenden Anregungen in wissenschaftlichen Vereinigungen, in denen er verkehrte, mit einem Album seiner Collegen und Lehrer beschenkt.

Er blieb nun vom Frühjahr 1877 bis Herbst 1878 in Zürich, beschäftigt mit seinen zahlreichen Untersuchungen und mit Vorlesungen und entfaltete seine wissenschaftliche Geschäftigkeit namentlich auch in geselligen Vereinigungen, in welchen Mediciner und Biologen, Physiker und Philosophen, seiner Initiative folgend, sich zusammenfanden.

Im Herbst 1878 wurde Luchsinger an die Thierarzneischule in Bern berufen und damit begannen für ihn neben den Freuden auch die Leiden academischer Carrière sich geltend zu machen und zwar gleich bei seinem Eintritt in seine neue Stellung.

Als Professor der Thierarzneischule wäre er zufolge eines Beschlusses der Behörden auch Professor an der Hochschule gewesen; allein die Vertreter der medicinischen Facultät wollten ihre Collegen an der Veterinärschule nicht als solche anerkennen. Luchsinger suchte allen unnöthigen Discussionen, die sich aus diesem Verhältniss ergeben konnten, aus dem Wege zu gehen, indem er sich noch besonders an der medicinischen Facultät durch eine Habilitationsrede einführte, in welcher er seine weitgehenden umfassenden Gesichtspunkte in seiner Wissenschaft in geistvollem Vortrag darlegte. In seinem kleinen, einzimmerigen Laboratorim entfaltete er eine lebhafte wissenschaftliche Thätigkeit, in welche er auch manche seiner Collegen und Studenten hineinzog. Daneben war er wieder in gesellschaftlichen wissenschaftlichen Vereinen thätig, so z. B. in der naturforschenden Gesellschaft Berns, zu deren Präsident er 1881 gewählt wurde. Im Jahr 1881 erlebte er in Bern eine erste schmerzliche Enttäuschung, als er bei der Besetzung der durch Valentins Tod vacant gewordenen Professur für Physiologie übergangen wurde, während seine Stellung in seiner Wissenschaft ihm und seinen Freunden ihm Anwartschaft auf diese Stelle verheissen mussten. Zwar wurde ihm bei dieser Gelegenheit in Anerkennung seiner wissenschaftlichen Ver-

dienste die ordentliche Professur für Pharmakologie übertragen; aber die Zurücksetzung musste ihn schmerzen und das Gefühl aufkommen lassen, Feinde zu haben. Indessen machten ihn diese Erfahrungen nicht ungerecht; denn er befreundete sich bald mit seinem Concurrenten und neuen Collegen und sie wurden ihm ein Sporn zu erneuter Thätigkeit; er suchte namentlich an sich selber zu arbeiten, um für die Zukunft den Vorwurf zu entkräften, dass die Art seines Vortrages seine Lehrthätigkeit beeinträchtige und in diesem Bestreben trat er oft in öffentlichen Reden auf. Er blieb auch gewissenhaft seinen Berufspflichten treu, indem er nun als Professor der Pharmakologie eine Reihe toxikologischer Untersuchungen ausführte, welche ihn natürlich von seiner Wissenschaft, der eigentlichen Physiologie, nicht fernhielten.

Ein starker Schlag war es nun freilich, als er, 1884, zum zweiten Mal bei Besetzung der Professur für Physiologie übergangen wurde, diesmal entgegen den einstimmigen Anträgen der Facultät.

Indessen folgte dieser Niederlage bald ein Trost, wie er ihn sich selber nicht besser wünschen konnte.

Sein Herz war an Zürich gekettet geblieben, wo er seine Studien gemacht und wo viele seiner alten Freunde waren, die er regelmässig in den Ferien wieder aufsuchte und er fühlte sich daher getröstet und beglückt, als er im Herbst 1884 an Stelle seines ehemaligen Lehrers, Herrn Professor Hermann, an die Universität Zürich berufen wurde. In seinem dankbaren und ehrlichen Herzen lebte nun zunächst das eine Bestreben, das Vertrauen, das die Zürcher Behörden in ihn gesetzt, zu rechtfertigen und es entsprach ganz seinem biedern Character, seine ausserordentliche Begabung und Energie zunächst in den Dienst der Dankbarkeit zu stellen. Er hatte nun seines Lebens Ziel erreicht: Eine wissenschaftliche Stellung mit grossem Wirkungskreis, wo er seine Thätigkeit ungehemmt entfalten konnte und auch Räumlichkeiten und Mittel zur Bethätigung seiner Bestrebungen stunden in dem neuen Institut in naher Aussicht. Das beengende Gefühl persönlicher Streitigkeiten war von ihm genommen und er schien in den Hafen ungestörten Friedens und Glückes eingelaufen.

Dies Glück sollte leider nicht lange dauern. Ein ganzes Wintersemester hat Luchsinger bei starker, vielleicht zu starker Stundenbelastung gelesen und dabei eine zufriedenstellende Probe seiner Lehrbefähigung abgelegt. Im Juni des folgenden Semesters starb Luchsingers Vater und seit dessen Leichenbegängniss ist auch er erkrankt, und nicht mehr zum Lesen gekommen. Eine schwere Erkrankung von Herz und Nieren hielt ihn mit wenigen Unterbrüchen ans Krankenlager gefesselt und im Herbst 1885 musste er sich mit grossem Widerstreben darein ergeben, für das Wintersemester Urlaub zu nehmen, um im Südtirol den Winter zuzubringen. Er trat die Reise dahin in Besorgniss erregendem Zustand an und hatte in München eine Lungenentzündung durchzumachen. Indessen schien er sich in Meran zu erholen und seine Briefe waren bis zum letzten Moment voller Zuversicht. Indessen ist nicht zu ersehen, wie viele Qualen ihm die Einsicht in seinen Zustand bereitet haben muss. Er wollte nicht an eine ernstliche Gefahr glauben, wie schwerwiegend ihm selbst auch manche Symptome erscheinen mussten und er hoffte durch seine Energie, die ihm noch nie versagt, das Verhängniss besiegen zu können, und so unterzog er sich einer heroischen Kur. Täglich machte er mit krankem Herzen stundenlange Spaziergänge und gymnastische Uebungen bis zur Erschöpfung und diese Kur schien eine Zeit lang auch Erfolg zu haben; da kam plötzlich am 20. Januar 1886 die Nachricht von seinem Tode. Ein Schlaganfall hatte dem jungen hoffnungsreichen Leben ein Ende gemacht. Am 24. Januar fand unter zahlreicher Betheiligung seitens der Collegen, Freunde und Studenten aus Zürich das Leichenbegängniss in Glarus statt.

Eine hoffnungsreiche, vielversprechende, wissenschaftliche Thätigkeit ist mit Luchsinger der Wissenschaft entrissen worden, ein Forschertrieb der lautersten Art, frei von selbstsüchtigen Absichten; Luchsinger forschte aus inwendigem, ungesuchtem Antrieb und im Bestreben die Wahrheit zu suchen; er forschte nicht, um zu schreiben, und was er schrieb, war darum auch so kurz und überzeugend gehalten. Man kann vielleicht sagen, dass der intensive Forscherdrang Luchsinger etwas einseitig machte; alle seine Mussestunden waren Ueberlegungen

gewidmet, welche auf seine Untersuchungen Bezug hatten und mit allen seinen geselligen Bethätigungen waren seine wissenschaftlichen Bestrebungen verknüpft. Seine Erholung bestand meist aus Mittheilung seiner Bestrebungen im Kreise von Freunden, welche er für seine Studien zu interessiren wusste und es ist nicht ganz unwahrscheinlich, dass diese intensive einseitige Anstrengung zum allzufrühen Consum der physischen Kräfte nicht wenig beigetragen hat.

Es liegen von Luchsinger ca. 80 wissenschaftliche Mittheilungen vor, welche sich zwar auf verschiedenen Gebieten bewegen, in welchen sich aber im Grossen und Ganzen eine bestimmte Richtung ausspricht, welche nicht wenig zu einer Umbildung in den Zielpunkten physiologischer Bestrebungen beigetragen haben dürfte.

Es würde zu weit führen, auf alle Publicationen Luchsingers einzugehen. Es findet sich im Anhang eine Aufzählung derselben. Die ersten Publicationen Luchsingers bewegten sich noch in derjenigen Richtung der Physiologie, welche als physikalische bezeichnet werden kann, und behandelten zum Theil gemeinsam mit Hermann Fragen der Dehnbarkeit des Muskels, der Muskelströme etc.

Luchsinger wendete sich sehr bald den eigentlich vitalen Fragen der Physiologie zu, nämlich den Problemen, wie physiologische Functionen aus mechanischen Vorgängen zu erklären seien. Untersuchungen dieser Art werden sich entweder mit der Chemie der physiologischen Vorgänge oder den nervösen Einflüssen beschäftigen müssen. Beide Richtungen hat Luchsinger cultivirt.

In seinen Untersuchungen über Glycogenbildung in der Leber vertheidigte er mit Erfolg durch mannigfach variirte Versuchsanordnungen die Ansicht, dass das Glycogen durch Synthese im Organismus gebildet werde, entgegen der vulgären Ansicht, dass in den thierischen Geweben die chemischen Processe sich wesentlich auf Spaltungen und Zersetzungen zurückführen lassen, Synthesen dagegen fraglich seien; die Frage war danach von principieller Tragweite.

Eine grosse Reihe von Untersuchungen fällt in das Gebiet der Circulationslehre, insbesondere die nervösen Einflüsse auf

Herz und Gefässe und dieselben enthalten reichhaltige Aufschlüsse über den localen und centralen Sitz der Circulationsinnervation. Diese Arbeiten führten zu verwandten über die nervösen Einflüsse auf Secretionen und es sind in dieser Beziehung bahnbrechend geworden die Publicationen über Schweisssecretion.

Alle Arbeiten dieser Art waren mit einer eingehenden Durchmusterung des Rückenmarks verbunden, dessen physiologischer Function eine Reihe eingehender Arbeiten gewidmet ist. Luchsinger zeigte dabei insbesondere, dass dem Rückenmark eine viel selbstständigere Stellung in der Besorgung mannigfaltiger physiologischer Functionen zukomme, als gewöhnlich angenommen wurde und es führten diese Arbeiten zur Annahme einer Art von Decentralisation der automatischen Centren, und der Selbständigkeit einer Reihe isolirter Organe, deren Erregungsbedingungen aufgeklärt wurden. Ohne Zweifel lag der Schwerpunkt Luchsinger'scher Forschung auf diesem Gebiet und wären noch mannigfaltige bahnbrechende allgemeine Gesichtspunkte über die Ausscheidung der Bedeutung der Centralorgane zu erwarten gewesen, um so mehr, als Luchsinger alle Arten thierischer Organismen seiner Forschung unterzog und sich seine Physiologie immer mehr zu einer vergleichenden ausgestaltete. Die Anschauungen Luchsingers mussten zu einer andern Auffassung über die Bedeutung des Gehirns als den bisherigen führen und ohne Zweifel würde er sich mit der Zeit mit Erfolg der Untersuchung dieses Centralorgans zugewendet haben.

Nebst diesen Untersuchungsgebieten cultivirte der Verstorbene mit Erfolg die Toxikologie und es war auch auf diesem Gebiet sein Hauptaugenmerk auf die centralen Angriffspunkte der Gifte gerichtet.

Alle Publicationen Luchsingers zeugen von ausserordentlicher Gewissenhaftigkeit in der Beobachtung und Schlussfolgerung. Die Methoden, deren er sich bei seinen Versuchen bediente, wurden zuerst kritisch geprüft und mit Umsicht und Vorsicht ausgewählt. Luchsinger war kein einseitiger Frosch- oder Kaninchen-Physiolog. Er wählte die Versuchsthiere, die

er am passendsten fand und so ist es erklärlich, dass ihm fast alle zoologischen Gebiete Objecte zu seinen Untersuchungen abgaben, Warmblüter wie Kaltblüter, Insecten und Crustaceen und niedere Organismen bis zur Grenze zwischen Thier- und Pflanzenreich; er trieb vergleichende Physiologie im weitesten Umfang.

Im Experimentiren erreichte Luchsinger eine sehr grosse Geschicktlichkeit; seine Methode war einfach, wie die seines Vorbildes Bernard, die Beobachtung scharf und gewissenhaft.

In seinen Folgerungen war er vorsichtig, vielleicht gerade weil er sich einer gewissen Hinneigung zur Verallgemeinerung bewusst war. In letzter Instanz appellirte er immer an das Experiment, dessen Bedeutung in der Methode der Forschung er in den Vordergrund stellte.

In der Darstellung war er kurz und klar, eher markig als fliessend und elegant, jedenfalls fesselnd und sachlich und dies gilt auch von seinem mündlichen Ausdruck als Lehrer und für seine Vorträge in Vereinen. Er war ein fertiger Docent und Lehrer, als er nach Zürich kam. Was seine Lehrthätigkeit aber besonders auszeichnete, war die Fähigkeit, seine Schüler für seine Wissenschaft zu begeistern und sie zu eigener Bethätigung in derselben zu veranlassen. Es erklärt sich daraus, dass unter seiner Leitung in Bern trotz seiner untergeordneten Stellung und unzulänglicher Räumlichkeiten eine grosse Reihe von Dissertationen und kleinen Untersuchungen entstand. Wer, wie Luchsinger, auf die Jugend einzuwirken versteht, kann nur ein guter Lehrer sein.

Seinem Character nach war Luchsinger ein ausgesprochener Choleriker, von starker Originalität, rasch in der Reception und von prompter und schneidiger Reagibilität; aber es ist ihm die Schwierigkeiten eines bedeutungsvollen Temperaments zu besiegen gelungen. In seinen persönlichen Beziehungen war er von unbedingter Geradheit und weitgehendster Offenheit, und welche Treue er in der Anhänglichkeit bewies, wissen seine vielen Freunde.

In der Wissenschaft und bei seinen Freunden wird der Verstorbene unvergessen bleiben.

Verzeichniss der Publicationen von B. Luchsinger.

1871. Zur Theorie der Muskelkräfte. Pfl. A. IV.
1872. Ueber W. Preyers myophysische Untersuchungen. Pfl. A. VI.
1873. Antwort auf W. Preyers Rechtfertigung seiner myophysischen Untersuchungen. Pfl. A. VII.
— Zur Glycogenbildung in der Leber. Pfl. A. VIII.
1874. Kritisches und Experimentelles zu W. Preyers myophysischem Gesetz. Pfl. A. VIII.
1875. Experimentelle und kritische Beiträge zur Physiologie und Pathologie des Glycogens. Dissertation (s. auch Vierteljahrsschrift d. naturf. Ges. 1875, Heft 1 u. 2.)
— Experimentelle Hemmung einer Fermentwirkung des lebenden Thieres. Pfl. A. XI.
— Ein Beitrag zum Verständniss des Rheochords. Pfl. A. XI.
1876. Zur Innervation d. Gefässe (mit A. J. Kendall). Pfl. A. XIII.
— Zur Theorie der Secretionen (mit A. J. Kendall). Pfl. A. XIII.
— Neue Versuche zu einer Lehre von der Schweisssecretion, ein Beitrag zur Physiologie der Nervencentren. Pfl. A. XIV.
— Weitere Versuche und Betrachtungen zur Lehre von den Nervencentren. Pfl. A. XIV.
— Fortgesetzte Versuche zur Lehre von der Innervation der Gefässe. Pfl. A. XIV.
1877. Die Wirkungen von Pilocarpin und Atropin auf die Schweissdrüse der Katze. Ein Beitrag zur Lehre vom doppelseitigen Antagonismus zweier Gifte. Pfl. A. XV.
1878. Zur Kenntniss der Functionen d. Rückenmarks. Pfl. A. XVI.
— Die Schweissnerven für die Vorderpfote der Katze. Pfl. A. XVI.
— Nachträgliche Bemerkungen zur Physiologie der Schweisssecretion. Med. Centralbl. 1878. 3.
— Ueber die Secretionsströme der Haut bei der Katze (mit Hermann). Pfl. A. XVII.
— Ueber Secretionsströme an der Zunge des Frosches nebst Bemerkungen über einige andere Secretionsströme (mit Hermann). Pfl. A. XVIII.
— Notizen zur Physiologie des Glycogens. Pfl. A. XVIII.

1878. Die Erregbarkeit der Schweissdrüsen als Function ihrer Temperatur. Pfl. A. XVIII.
— Zum Verlauf der Schweissnerven der Katze. Pfl. A. XVIII.
— Zum Verlauf der Gefässnerven im Ischiadikus der Katze (mit F. Puelma). Pfl. A. XVIII.
— Besitzt normaler menschlicher Schweiss wirklich saure Reaction? (mit D. Trümpy) Pfl. A. XVIII.
— Die Wirkungen von Muscarin und Atropin auf die Schweissdrüsen der Katze. Ein weiterer Beitrag zur Lehre vom doppelseitigen Antagonismus zweier Gifte (mit D. Trümpy). Pfl. A. XVIII.
— Zur Lehre vom wechselseitigen Antagonismus zweier Gifte. (Nachtrag.) Pfl. A. XVIII.
— Die Schweissabsonderung und einige verwandte Secretionen bei Thieren. Achter Abschnitt der Physiologie der Absonderungsvorgänge im Handbuch der Physiologie, herausgegeben von L. Hermann. Leipzig, Vogel. Bd. V.
— Zur allgemeinen Physiologie der irritabeln Substanzen. Habililationsrede. Bonn, E. Strauss.
1879. Zur Physiologie der Schweisssecretion. Arch. f. pathol. Anatomie LXXVI.
— Ueber eine eigenthümliche Missbildung des Froschherzens. Ibid.
— Zur Innervation des Herzens (mit J. M. Ludwig). Med. Centralbl. 1879, Nr. 23.
— Ueber das Verhalten der Aal-Iris gegen verschiedenfarbiges Licht. Med. Centralbl. 1879, Nr. 39.
1880. Zur Theorie der Reflexe und der Reflexhemmung. Mitth. d. Berner naturf. Ges. 1880.
— Ueber die Wirkungen der Wärme und des Lichtes auf die Iris einiger Kaltblüter. Ibid.
— Zur Leitung nervöser Erregung. Ibid.
— Neue Beiträge zur Physiologie der Schweisssecretion. Pfl. A. XXII.
— Existiren im nervus vertebralis wirklich pupillendilatirende Fasern? (mit Guillebeau) Pfl. A. XXII.
— Weitere Versuche und Betrachtungen zur Lehre von den Rückenmarkscentren. Pfl. A. XXII.

1880. Ein neuer Versuch zur Lehre von der directen Reizbarkeit des Rückenmarks. Pfl. A. XXII.
— Ist wirklich das normale Rückenmark der Säuger allgemeiner Reflexe unfähig? Pfl. A. XXII.
— Ueber gekreuzte Reflexe. Pfl. A. XXII.
— Zur Lehre von dem Cheyne-Stokes'schen Phänomen (mit O. Sokoloff). Pfl. A. XXIII.
— Zur Symptomatologie des Diabetes mellitus. Pfl. A. XXIII.
— Zur Innervation der Lymphherzen. Pfl. A. XXIII.
— Zur Theorie der Reflexe. Pfl. A. XXIII.
1881. Zur Beziehung von Leitungs- und Erregungsvermögen der Nervenfaser. Pfl. A. XXIV.
— Eine toxikologische Versuchsreihe; zugleich als Antwort an Professor Harnack. Arch. f. exp. Phatol. XIV.
— Zur Physiologie d. Herzens (mit J. M. Ludwig). Pfl. A. XXV.
— Von den Venenherzen in der Flughaut der Fledermäuse. (Ein Beitrag zur Lehre von dem peripherischen Gefässtonus.) Pfl. A. XXVI.
— Atropin und glatte Muskelfaser (mit J. Szpilman). Pfl. A. XXVI.
— Zur Physiologie der Ureteren (mit O. Sokoloff). Pfl. A. XXVI.
— Ueber Erregungen und Hemmungen. Pfl. A. XXVII.
1882. Fortgesetzte Studien zu einer allgemeinen Physiologie der irritablen Substanzen. (Ein Beitrag zur Kenntniss des Centralmarks der annulata Cuvieri.) (Mit A. Guillebeau.) Pfl. A. XXVIII.
— Zur verschiedenen Erregbarkeit verschiedener Nervenmuskelapparate. Pfl. A. XXVIII.
— Fortgesetzte Studien am Rückenmarke (mit A. Guillebeau). Pfl. A. XXVIII.
— Zur Wirkung einiger Metallgifte (mit J. Marti).
— Für Untersuchungen der spinalen Centren ist das Kaninchen zu vermeiden. Pfl. A. XXVIII.
— Ueber Reizgifte peripherer Nervenenden. Pfl. A. XXVIII.
— Thermisch-toxikologische Untersuchungen. In den physiologischen Studien zu Valentins Jubiläum herausgegeben von Grützner und Luchsinger. Leipzig, Vogel.

1882. Ueber die locale Diastole des Herzens. Pfl. A. XXVIII.
— Historische Notiz. Pfl. A. XXIX.
— Zur Theorie des Wiederkauens. Mitth. d. Berner naturf. Ges. 1882.
— Zur Physiologie des Herzens. Ibid.
— Ueber die Wirkung von Kälte und Wärme auf die Iris der Frösche. Ibid.
1883. Einige neue Versuche über die Wirkungen des Wismuths (mit E. Mory). Ibid.
1884. Zur Lage der Gleichgewichtscentren. Pfl. A. XXXIV.
— Zur Architectur der Semilunarklappen. Pfl. A. XXXIV.
— Ist Santonsäure ein wirkliches Hirnkrampfgift? Pfl. A. XXXIV.
— Zur Innervation der Iris des Kaninchens. Pfl. A. XXXIV.
— Zur Theorie des Wiederkauens. Pfl. A. XXXIV.
— Toxikologische Beiträge (mit E. Hess). Pfl. A. XXXV.
— Zur Kenntniss der physiologischen Wirkungen einiger Ammoniumbasen (mit A. Glause). Fortschr. d. Med. 1885, Nr. 8.

Dissertationen aus Luchsingers Laboratorium.

1879. E. Gysi, Beiträge zur Physiologie der Iris.
1880. E. Petri, Beitrag zur Lehre von den Hemmungsapparaten des Herzens.
1881. O. Sokoloff, Physiologische und toxikologische Studien am Herzen.
— C. Arnold, Beiträge zur vergleichenden Physiologie.
1882. A. Gourewitsch, Ueber die Beziehung des nervus olfactorius zu den Athembewegungen.
1883. J. Marti, Beiträge zur Lehre von den Metallvergiftungen.
— W. Neumann, Ueber toxikologische Verschiedenheiten functionell verschiedener Muskelgruppen. Ein Beitrag zur Lehre von den Muskelgiften.
— E. Mory, Einige neue toxikologische Versuche über die Wirkungen des Wismuths.
1884. Fr. Kuhl, Ueber den Einfluss der Wärme und Kälte auf verschiedene irritable Gewebe warm- und kaltblütiger Thiere.
— A. Glause, Zur Kenntniss der Hemmungsmechanismen des Herzens.

[Alfr. Kleiner.]

Auszüge aus den Sitzungsprotokollen.

Hauptversammlung vom 17. Mai 1886.

1. Herr Bibliothekar Dr. Ott legt das Verzeichniss der seit der letzten Sitzung eingegangenen Schriften vor:

A. Geschenke.

Von Herrn Prof. Dr. G. Schoch in Fluntern:

Neuroptera Helvetiae.

Von Herrn Gärtner Bächtold in Andelfingen:

Der erfahrene Führer im Haus- und Blumengarten. Jahrg. 2. Nr. 4—6.

Von Herrn J. Jäggi:

Lüscher, H., Flora von Zofingen und Umgebung.

Von Herrn Prof. Dr. A. Mousson:

Die Temperaturverhältnisse des Russischen Reiches. Atlas.

Von Tit. eidgenössischen Ober-Bauinspectorat in Bern:

Schweiz. hydrometrische Beobachtungen 1885: Aaregebiet a u. b. — Rheingebiet a u. b. — Limmatgebiet. — Reussgebiet. — Rhône. — Tessin.

Von Herrn Prof. Dr. Burmeister in Buenos-Aires:

Anales del Museo nacional de Buenos-Aires.

Von Herrn Prof. Schär:

Die Naturgeschichte des Cajus Plinius secundus. (In 16 Lief. 1880—82.)

v. Heldreich, Ph., Pflanzen der attischen Ebene. 5. Heft.

B. In Tausch gegen die Vierteljahrsschrift:

Boletim da sociedade de geographia de Lisboa. 5. Serie. Nr. 7 u. 8.

Memoirs of the geological survey of India. Vol. 21. Part. 3 u. 4.

— — Palaeontologia. Series XIII u. XIV. Vol. 1.

— — — Serie IV. Vol. 1.

Bericht über die Senkenbergische naturf. Gesellsch. für 1885.

Reiseerinnerungen a. Algerien u. Tunis von Dr. W. Kobelt.

Atti della reale accademia dei Lincei. IV. Serie. Vol. II. Nr. 4—8.

Bulletin de la société vaudoise. 3. Série. Vol. 21. Nr. 93.
Observations of Greenwich 1883.
Cape catalogue of stars 1850.
Proceedings of the Manchester literary soc. Vol. 23 u. 24.
Memoirs of the Manchester literary soc. Vol. 28.
Bulletin de l'académie imp. de St. Pétersbourg. Tome XXX. Nr. 3. Tome XXXI. Nr. 1.
Leopoldina. Heft 22. Nr. 3. 4.
Records of the geolog. survey of India. Vol. XIX. Part. 1.
Atti della società Toscana di science naturali. Vol. V.
Bericht des naturhistorischen Vereins in Passau 1883—85.
Industrie-Zeitung von Riga. Jahrg. XII. Nr. 3—7.
Irmischia. Jahrg. 5. Nr. 10—12.
Bulletin de la soc. des sciences de la Basse-Alsace. Tome 20. Nr. 3. 4.
Transactions of the entomolog. soc. of London for 1885. Part. 5.
Sitzungsberichte und Abhandlungen der „Isis" für 1885.
Bericht, 19., des botanischen Vereins in Landshut 1881—85.
Proceedings of the R. geographical soc. Vol. VIII. Nr. 4. 5.
Verhandlungen des naturhistorischen Vereins der preuss. Rheinlande. Jahrg. 42. Nr. 2.
Verhandlungen d. naturf. Vereins in Brünn. Bd. 18. Heft 1. 2.
Bericht der meteorologischen Commission in Brünn für 1883.
Mittheilungen aus dem Osterlande. Neue Folge. Bd. 3.
Jahrbuch d. k. k. geolog. Reichsanstalt für 1886. Bd. 36. Heft 1.
Verhandlungen derselben für 1886. Nr. 2—4.
Jahresbericht, 52., der Museums-Gesellschaft in Zürich.
Mémoires de l'académie de Lyon. Tome 27.
Annales de la soc. d'agriculture de Lyon. V. Série. Tome 6—8. 1883—85.
Abhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins zu Bremen. Bd. 9. Heft 3.
Abhandlungen der mathemat.-physik. Klasse der k. sächs. Ges. Bd. 13. Nr. 5.
Bulletin de la soc. imp. des naturalistes de Moscou p. 1885. Nr. 1. 2.
Zeitschrift der deutschen geolog. Gesellschaft. Bd. 37. Heft 4.
Bericht, 24., der oberhess. Gesellschaft f. Natur- u. Heilkunde.
Földtani Közlöny. Bd. 15. Nr. 11. 12.

Jahresbericht der k. ungar. geolog. Anstalt für 1884.
Mittheilungen aus dem Jahrbuch der k. ungar. geolog. Anstalt. Bd. 7. Heft 5 und
Katalog d. allgem. Landesausstellung zu Budapest 1885.

C. Anschaffungen.

Gazzetta chimica italiana. Anno XV. Fasc. 10. Anno XVI. Fasc. 1.
Baillon, Histoire des plantes. Tome VIII.
Beiträge zur Paläontologie Oesterreich-Ungarns. Bd. 4. Heft 3. 4. Bd. 5. Heft 2.
Centralblatt, biologisches. Bd. VI. Nr. 1—4.
Wetterberichte der schweiz. meteorolog. Centralanstalt vom 8. März bis 17. Mai.
Transactions of the zoological society of London. Vol. 11. Part. 11. Vol. 12. Part. 1.
Forbes, Wanderungen eines Naturforschers im malayischen Archipel. Bd. 2.
Zoologischer Jahresbericht für 1884. Abth. IV. Abth. I.
Abhandlungen d. schweiz. paläontolog. Gesellsch. Vol. 12. 1885.
Recueil zoologique suisse pr. Fol. Tome 3. Nr. 2.
Zeitschrift, elektrotechnische. Jahrg. 7. Heft 3. 4.
Journal de physique pr. Almeida. II. Série. Tome V. Nr. 3. 4.
Liebig's Annalen der Chemie. Bd. 232. Heft 2. 3.
Mémoires de l'académie imp. des sciences de St. Pétersbourg. Tome 33. Nr. 6—8. Tome 34. Nr. 1.
Astronomisches Jahrbuch von Berlin für 1888.
Beiträge zur Geologie und Paläontologie der argent. Republik. I. geolog. Theil.
Transactions of the zoological soc. of London. Vol. 12. Part. II.
Acta mathematica von Mittag-Leffler. Vol. 7. Nr. 4.
Mémoires de la soc. r. des sciences de Liège. II. Série. Vol. XI.
Rabenhorst's Kryptogamen-Flora. Bd. 1: Pilze u. Bd. 1, 2. Abth. Lief. 14—21. Bd. 2: Meeresalgen. Lief. 1. 2.
Mineralogische Mittheilungen von Tschermak. Neue Folge. Bd. 7. Heft 4.

2. Herr Escher-Hess, Quästor, legt die Rechnung für das Jahr 1885 vor, welche folgendes Ergebniss zeigt:

Einnahmen:	Fr. Cts.
Vermögensbestand seit 1884	76,114. 11
Zinsen	3,266. 60
Marchzinsen	124. 50
Eintrittsgelder	120. —
Jahresbeiträge	2,880. —
Neujahrsblatt	409. 75
Katalog	188. —
Vierteljahrsschrift	110. —
Beiträge von Behörden und Gesellschaften (Reg. d. Kts. Zürich 400, Stadtrath Zürich 500, Museumsgesellschaft 320	1,220. —
Summa	84,432. 96

Ausgaben:	Fr. Cts.
Bücher	4,091. 10
Buchbinderarbeiten	557. 55
Neujahrsblatt	612. 35
Vierteljahrsschrift	2,615. 35
Katalog	795. 20
Miethe, Heizung und Beleuchtung	226. 50
Besoldungen	1,200. —
Verwaltung	229. 45
Allerlei	30. —
Summa	10,357. 50

Es bleibt somit als Gesellschaftsvermögen auf Anfang 1886 Fr. 74,075. 46, woraus sich gegenüber dem Vorjahr ein Rückschlag von Fr. 2,038. 65 ergiebt.

Auf Antrag des Comités wird die Rechnung unter bester Verdankung gegen den Quästor genehmigt.

3. Der Secretär erstattet folgenden Bericht über die Thätigkeit und den Mitgliederbestand der Gesellschaft seit der Hauptversammlung vom 18. Mai 1885:

Seit der letztjährigen Hauptversammlung versammelte sich die Gesellschaft in 11 Sitzungen, in welchen 8 Vorträge gehalten und 9 Mittheilungen gemacht wurden.

Herr Director Billwiller bespricht die Ergebnisse der Aufzeichnungen des Anemometers auf dem Säntis.

Herr Prof. Fiedler hält einen Vortrag über die Büschel gleichseitiger Hyperbeln, den Feuerbach'schen Kreis und die Steiner'sche Hypercycloide.

Herr Prof. Heim spricht über den Bergsturz von Emmaten-Schönegg, über den Untergrund des Vierwaldstättersees, macht einige Vorweisungen von Producten mechanischer Gesteinsmetamorphosen, und hält einen Vortrag über die Processe der

Feuerbestattung nach den Systemen von Gorini, Venini, Siemens und Bourry.

Herr Prof. Schröter macht einige botanische Vorweisungen.

Herr Prof. Weber hält einen Vortrag über einen neuen Strahlungsmesser.

Herr Dr. Keller spricht über die Wanderungen der Medusen und referirt über den rothen Regen vom 15. October 1885.

Herr Dr. Imhof berichtet über neue Resultate aus der pelagischen und Tiefsee-Fauna der Süsswasserbecken und über mikroskopische pelagische Thiere aus den Lagunen von Venedig.

Herr Prof. Rudio hält einen Vortrag über einige Grundbegriffe der Mechanik.

Herr Prof. Bühler spricht über den Schneedruck vom 28. September 1885.

Herr F. Graberg hält einen Vortrag über das Zeichnen im Dienste der Naturwissenschaft und das Masszeichnen insbesondere.

Herr Dr. Tobler macht einige Mittheilungen aus dem Gebiete der Elektrotechnik.

Herr Dr. Wettstein spricht über verschiedene Species einer Fischgattung des Glarner-Schiefers, entstanden durch mechanische Gesteinsumformungen.

Ausserdem fand am 8. Februar ein Gesellschaftsabend statt, in dessen erstem Theile seitens verschiedener Mitglieder kleinere Mittheilungen und Vorweisungen gemacht wurden.

Es wurden im verflossenen Jahre 3 neue Mitglieder in die Gesellschaft aufgenommen. Ihren Austritt nahmen 2 Mitglieder. Durch Tod verlor die Gesellschaft 5 Mitglieder: die Herren Bibliothekar Dr. Horner, Prof. Luchsinger, Sal. Pestalozzi-Hirzel, Dr. Haller und H. Berl, ehemaliger Privatdocent.

Die Gesellschaft zählt gegenwärtig 184 ordentliche, 22 Ehren- und 10 correspondirende Mitglieder. Von den ordentlichen Mitgliedern wohnen 31 ausserhalb der Schweiz.

4. Der Bericht des Bibliothekars, Herr Dr. Ott, lautet wie folgt:

Im Berichtsjahr betrug die Ausgabe für Bücheranschaffungen Fr. 4,502. 85. Werden hievon die Rabatte im Betrage von Fr. 476. — abgezogen, so verbleibt als eigentliche Ausgabe für

Bücher Fr. 4,026. 85. Diese vertheilen sich mit Fr. 705. 45 auf neue Anschaffungen und mit Fr. 3,321. 40 auf Fortsetzungen. Unter den neuen Anschaffungen sind namentlich zu nennen:

Mittheilungen der zoolog. Station Neapel.
Hausknecht, Monographie der Gattung Epilobium.
Annales de botanique de Buytenzorg.
Rabenhorst, Kryptogamenflora Deutschlands.
Lehmann, Entstehung der altkrystallin. Schiefergesteine.
Coulomb, Collection de mémoires.
Tyndall, Researches on diamagnetism.
Routh, Treatise on the dynamics of rigid bodies.
Klotsch, Botan. Ergebnisse der Reise d. Pr. Waldemar.

Es sind ferner Geschenke eingegangen von folgenden Donatoren:

Eidg. Oberbauinspectorat.
Schweiz. meteorolog. Centralanstalt.
Schweiz. geolog. Commission.
Direction der Gotthardbahn.
Bureau international des poids et mesures.
Fries'scher Fonds.
Stadtbibliothek.
Herren Prof. A. Favre, F. Reuleaux, R. Wolf, A. Kölliker, A. Heim, Struve, J. J. Egli, Soret, Tribolet, Stiemer, Dr. Töpffer, Fr. Beust, Putnam, Ch.', Imhof, Brezina, A. Kreysler, Rahn-Meyer, W. Burkhard, Bächtold, Graberg.

Allen diesen Donatoren sprechen wir im Namen der Gesellschaft den verbindlichsten Dank aus. Es ist ferner zu erwähnen, dass die im abgelaufenen Jahre aufgetretene Lokalfrage, die uns grosse Schwierigkeiten zu bereiten drohte, durch Entgegenkommen der Stadtbibliothek vom Stadtrath dahin entschieden worden ist, dass unserer Bibliothek noch ein Verbleiben am bisherigen Orte für 4 Jahre zugesichert ist. In Bezug auf unser Verhältniss zum Museum ist aus der Gesellschaft der Wunsch nach einer Abänderung im Modus des Auflegens der Zeitschriften geäussert worden in Folge der Errichtung unseres Lesezimmers. Es soll im Interesse derjenigen unserer Mitglieder, die dem Museum nicht angehören, angestrebt werden, dass die Zeitschriften zuerst nach Erscheinen eine kurze

Zeit in unser Lesezimmer kommen und nachher in's Museum, und werde ich über das Resultat der diesfälligen Unterhandlungen seinerzeit Bericht erstatten.

4. Der Antrag des Bibliothekars, die Versicherungssumme für die Bibliothek auf Fr. 220,000 zu erhöhen, wird zum Beschluss erhoben.

5. Auf den Antrag des Comités werden die Herren Prof. Hantzsch und Dr. Tobler zu Comité-Mitgliedern cooptirt.

6. Zum Präsidenten der Gesellschaft für die nächste zweijährige Amtsdauer wird der bisherige Vicepräsident, Herr Prof. Heim, gewählt. Zum Vicepräsidenten wird Herr Escher-Kündig gewählt.

Nachdem der bisherige Secretär, dessen sechsjährige Amtsdauer abgelaufen ist, eine Wiederwahl des Bestimmtesten abgelehnt hat, wird Herr Dr. Tobler zum Secretär ernannt.

7. Herr Mertens, Landschaftsgärtner, wird einstimmig als Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

8. Herr Prof. Kleiner hält einen Vortrag „Zur Erinnerung an Prof. Luchsinger sel.", in welchem er die grossen Verdienste unseres so früh der Wissenschaft entrissenen Mitgliedes gedenkt. Vergl. für denselben pag. 204—216.

9. Herr Prof. Cramer erstattet im Namen der Gesellschaft dem zurücktretenden Präsidenten und Secretär den wärmsten Dank für die ausgezeichnete Leitung der Geschäfte.

[R. Billwiller.]

Sitzung vom 21. Juni 1886.

1. Herr Bibliothekar Dr. Ott legt das Verzeichniss der seit der letzten Sitzung eingegangenen Schriften vor:

A. Geschenke.

Von Herrn Prof. Dr. R. Wolf:

Astronomische Mittheilungen. Nr. LXVI.

Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 30, Heft 4 und Jahrg. 31, Heft 1.

Palaz, Ad., Recherches expérimentales sur la capacité inductive spécifique de quelques diélectriques. Laus. 1886.

Von Herrn Gärtner M. Bächtold in Andelfingen:

Der erfahrene Führer im Haus- u. Blumengarten. Jahrg. 2. Nr. 7.

B. In Tausch gegen die Vierteljahrsschrift:

Jahresbericht der naturhist. Gesellschaft zu Nürnberg für 1885.
Jahresbericht des naturwissensch. Vereins in Magdeburg f. 1885.
Zeitschrift für Naturwissenschaften aus Halle. 4. Folge. 4. Bd. Heft 6. 5. Bd. Heft 1.
Atti della reale accademia dei Lincei. IV. Serie. Vol. II. Fasc. 9—11.
Proceedings of the zoological soc. of London for 1885. Part. IV.
Bulletin of the Museum of comp. zoology. Vol. 12. Nr. 3. 4.
Report, 14., of the zoological soc. of Philadelphia.
Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwiss. Kenntnisse in Wien. Bd. 25.
Procès-verbal de la soc. r. malacologique de Belgique. Séance Août 1885 — Dec. 1885.
Jahrbücher d. k. k. Centralanstalt f. Meteorol. etc. f. 1884. Bd. 21.
Leopoldina. Heft 22. Nr. 7. 8.
Industrie-Zeitung von Riga. Jahrg. 12. Nr. 8. 9.
Correspondenzblatt d. naturwiss. Ver. in Regensburg. Jahrg. 39.
Annalen d. k. k. naturhist. Hofmuseums in Wien. Bd. 1. Nr. 2.
Records of the geolog. survey of India. Vol. XIX. Part. 2.
Atti della soc. Toscana di scienze naturali. Vol. VII.
Bulletin de la soc. de sciences de la Basse-Alsace. Vol. XX. Nr. 5.
Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XX. Part. 4.
Bulletin de la soc. imp. des naturalistes de Moscou p. 1885. Nr. 3. 4.
Scientific Proceedings of the R. Dublin soc. N. S. Vol. IV. Part. 7–9. Vol. V. Part. 1. 2.
Scientific Transactions of the same. II. Series. Vol. III. Nr. 7—10.
Acta universitatis Lundensis. Tomes XXI. 1884/85 u. Katalog.
Procès-Verbaux du Comité internat. des poids et mesures. 1885.
Jahresbericht, 70., d. naturf. Gesellschaft in Emden 1884/85.
Notizblatt d. Ver. f. Erdkunde zu Darmstadt. IV. Folge. Heft 6.
Proceedings of the R. geographical soc. Vol. VIII, Nr. 6.
Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Würtemberg. Jahrg. 42.
Proceedings of the american philosoph. soc. Vol. 23. Nr. 121.
Bulletin of the U. S. geological survey. Nr. 7—23.
Annals of the New York Academy of sciences. Vol. 3. Nr. 3—8.

Transactions of the New York Academy of sciences. Vol. 3. Vol. 5. Nr. 1.
Publications of the Cincinnati Observatory. Part. 8. 1883.
Smithsonian contributions to knowledge. Vol. 24. 25.
Bulletin of the Buffalo soc. of natural sciences. Vol. 5. Nr. 1.
Publications of the Washburn Observatory. Vol. III. 1885.
Annual Report of the Comptroller of the Currency 1885.
Report of the Chief signal officier. War Departement 1884.
U. S. geolog. survey by J. W. Powell. 1882/83. 1883 u. 1884.
Smithsonian Report 1883.
Report: Department of Agriculture 1884.
Report of the expedition to Point Barrow, Alaska.
Publications of the bureau of ethnology by J. W. Powell. Vol. 3.
U. S. geological survey, Monographs. Vol. 6–8.
Washington astronomical and meteorolog. observations 1881. Vol. XXVIII.
Mittheilungen a. d. naturwissensch. Verein v. Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswalde. Jahrg. 17.

C. *Anschaffungen.*

Annalen der Chemie von Liebig. Bd. 233. Heft 1.
Rabenhorst, Kryptogamen-Flora. 1. Bd., 2. Abth. Lief. 22.
Bulletin de la soc. géologique de France. III. Série. Tome XI 1882/83 u. Tome XII.
Gazzetta chimica italiana. Anno XVI. Fasc. 2.
Transactions of the entomolog. soc. of London for 1886. Part. 1.
Centralblatt, biologisches. Bd. VI. Nr. 5—7.
Wetterberichte der schweiz. meteorolog. Centralanstalt. Nr. 121.
Elektrotechnische Zeitschrift. Jahrg. 7, Heft 5.
Journal de physique pr. Almeida. II. Série. Tome V. Nr. 5.
Acta mathematica von Mittag-Leffler. Vol. VIII. Nr. 1. 2.
Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie von Fittica für 1884. Heft 2.

2. Es wird die Einladung zur Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Berlin vorgelegt.

3. Desgleichen die Einladung zur Betheiligung an den in Genf stattfindenden Sitzungen der schweiz. naturf. Gesellschaft.

4. Da Herr Escher-Kündig die Wahl zum Vicepräsidenten ablehnt, wird Herr Escher-Hess gewählt.

5. Herr Prof. Lunge hält einen Vortrag über „Sacharin, ein neues Versüssungsmittel zum Ersatze des Zuckers".

6. Herr Prof. Mayer-Eymar hält einen Vortrag: „Zur Geologie von Aegypten" mit Vorweisungen.

Sitzung vom 12. Juli 1886.

1. Zur Feier des 70. Geburtstagsfestes des Herrn Prof. Dr. Wolf findet ein gemeinschaftliches Abendessen statt und wird dem Jubilar seitens der Gesellschaft eine Beglückwünschungs-Adresse überreicht.

2. Als Delegirte an die Versammlung der schweiz. naturforschenden Gesellschaft in Genf werden die Herren Prof. A. Heim und Director Dr. Moesch bezeichnet.

[Dr. A. Tobler.]

Notizen zur schweiz. Kulturgeschichte (Fortsetzung).

376) Briefe an Gantier. (Forts.)

J. Nicollet: Paris 1830 V 9. — M. Janin vous porte un volume que mes fonctions dans la Marine m'ont mis dans le cas de publier. Plus tard je vous enverrai une statique appliquée aux machines employées sur les vaisseaux. Je vous recommande la lecture de ma Géométrie: Vous y verrez une espèce de révolution que tout le monde ne partage pas en ce moment, mais que le tems doit faire prévaloir sous cette forme ou sous une autre.*) Il s'est glissé quelques inexactitudes dans la trigonométrie sphérique; je vous enverrai deux cartons plus tard. — Vous verrez à Genève Mr. *Verhulst*, jeune savant belge, que nous estimons beaucoup ici, et que nous vous recommandons. Vous le connaissez déjà, sans doute, par ses productions dans le journal de M. Quetelet. Voici une lettre pour lui, pour l'introduire chez Plana, que Bouvard devoit lui remettre avant

---

*) Bezieht sich wahrscheinlich auf seinen 1830 in zwei Bänden erschienenen „Cours de mathématiques à l'usage de la marine", welchen ich aber nie gesehen habe.

son départ. Si par hazard M. Verhulst était déjà loin de Genève, faites passer cette lettre à Turin. — J'ai reçu et lu votre mémoire sur la latitude avec un grand plaisir. J'ai le projet d'aller vous voir à l'inauguration de votre observatoire. — La Comète s'en va. Vos instrumens marchent; nous avons essayé vos objectifs.

Zach: Paris, aux bains de Tivoli 1830 V 25. J'ai reçu avec la plus grande reconnaissance votre intéressant mémoire sur la détermination de la latitude de Genève, que vous avez eu la bonté de me faire parvenir. Je vous en fais mes plus vifs remerciemens pour le plaisir que cet écrit m'a fait. J'y ai d'abord remarqué avec beaucoup de satisfaction, que vous êtes le premier astronome qui démontre la supériorité des instrumens de Mr. *Gambey*, lesquels, jusqu'à présent, ne jouissaient que d'une réputation d'autorité. Quoique il y a fort longtems qu'on en parle, et que plusieurs astronomes avaient été assez heureux de s'en procurer, cependant aucun d'eux n'avait fait voir par des faits, qu'ils méritaient les éloges banaux qu'on en faisait. Vous êtes, Monsieur, le premier qui a donné une représentation, et une description d'un cercle-répétiteur de Gambey, et d'avoir démontré, non pas avec des mots, mais avec des chiffres, le mérite incontestable de ces cercles. Cet habile artiste vous doit la plus grande reconnaissance, dont, à la vérité, il aurait dû être redevable à l'un de ses compatriotes, et non à un étranger, qui a seu rendre justice et service à la science, en démontrant mathématiquement ce que l'on ne croit pas toujours sur parole. — Une autre remarque, qui m'a fait grand plaisir, c'est la défense judicieuse que vous avez faite des cercles-répétiteurs, que, dans ces derniers tems on avait prit à tache de deprécier, et à faire tomber en discrédit. Vous avez, Monsieur, fort bien fait ressortir les circonstances où ce genre d'instruments de petites dimensions peuvent avoir leur grand mérite. On ne saurait assez faire connaitre un jugement si équitable, qui contribuerait, sans doute, à se reconcilier avec ces instrumens, lesquels, après des préconisations outrées, on a ensuite jugé avec trop de sévèrité, et de précipitation, jugement auquel des mauvaises et défectueuses constructions, au commencement de leur introduction, ont pu donner lieu et peut-

être même justifier en quelque façon. — J'ai encore d'autres remerciemens plus importans à vous faire, Monsieur, pour la bonté que vous avez eu d'examiner mon petit mémoire sur la figure de la terre, et d'appeler mon attention sur une réflexion à faire, au sujet de l'attraction du fil-à-plomb, lorsqu'il s'agit des observations, pour déterminer la mesure des degrés des parallèles. Mr. Wartmann, à qui j'ai envoyé mes corrections, m'a écrit, que Vous avez eu la bonté de les faire insérer convenablement dans mon mémoire. Si on le juge digne de l'honneur de paraître dans votre Bibliothèque universelle, je prend en ce cas la liberté de vous envoyer ci-contre, pour ainsi dire, une continuation, que je mette entièrement à votre disposition, d'en faire ce que vous jugerez à propos, de la jetter au feu, si vous le voudrez. — Je me rappelle toujours avec la plus grande reconnaissance, les bontés et l'intérêt que vous m'avez temoigné, pendant mon trop court séjour à Genève; connaissant ces sentimens dont vous m'honorez, je vous dirai un mot de ma pauvre santé. Hélas, Monsieur, quoique heureusement delivré de mes pierres, je conserve toujours la malheureuse Diathèse d'en former de nouvelles. Je dois par conséquent en surveiller soigneusement la formation, le grossissement et l'endurcissement, et faire retirer de tems en tems ces Embryons dès leur naissance, lesquels, si on négligeait de le faire, deviendraient de grosses pierres très dures, qu'il faudrait broyer. M. Civiale en a déjà retiré plusieurs de ces espèces de Foetus, c'est tous les 4 ou 5 mois, que je suis obligé de faire faire cette visite, et comme (à la honte de nos chirurgiens modernes) ce n'est que M. Civiale, qui puisse faire cette opération, je ne peux presque plus quitter cet habile chirurgien. Cependant comme le froid est très-contraire à mon mal, et augmente mes souffrances, je dois d'après le conseil de mon Docteur, aller passer l'hiver prochain à Hyères; je repasserai probablement le printems par Paris, pour me faire encore examiner, et voir si effectivement je serai condamné à passer le petit reste de ma vie dans cette Babylone moderne. — J'ai appris dans le tems, avec bien de peine, que vous avez souffert des yeux, mais que, grâce à Dieu, vous êtes parfaitement rétabli, ce dont j'ai vû de belles preuves avec bien du plaisir,

par les observations de la dernière comète, que vous avez faites à Chougny, et que M. Wartmann m'avait communiqué. Je les ai envoyé à Mr. Rumker à Londres, grand calculateur d'orbites cométaires. Il m'a répondu qu'il s'en occuperait incessament et qu'il m'en enverrait bientôt les élémens, que j'aurai l'honneur de vous faire passer, aussitôt que je les aurai reçu. On ne s'occupe pas ici de cet astre, du moins, on n'en entend pas parler. On ne s'en occupe pas davantage en Angleterre, a ce que me mande Mr. Rumker. Les savans y sont en guerre ouverte, ou plutôt en révolte générale. Les membres de la Société Royale ne veulent plus payer leurs redevances. La dissention est parmi les membres de la Société astronomique, la discorde parmi les Astronomes de Greenwich, etc. Les suites de ces querelles sont, que Mr. *Sabine*, le Secrétaire de la Société Royale, a été renvoyé. Mr. *Strattford*, le Secrétaire, et le Dr. *Pearson*, le trésorier de la Société astronomique, ont donné leur démission, et se sont tout-à-fait retiré de la Société. Le célèbre horloger *Hardy* a intentè un procès aux astronomes de Greenwich, qu'il accuse d'intrigues et de conspiration contre lui. Lord *Melville*, ministre de la marine, fait poursuivre cette affaire devant les tribunaux. Mr. *Rumker* a aussi un procès. On lui conteste la propriété de ses observations, parcequ'elles avaient été faites avec les instrumens appartenans à Sir Thomas *Brisbane*, le gouverneur de Paramatta. Mais on sait que Roi même avait perdu un procès contre les héritiers du Dr. *Bradley*, qui révendiquaient les observations de ce célèbre Astronome Royal, comme propriété personnelle, quoique faites avec les instrumens du Roy. Mr. *Babbage*, Professeur lucasien des Mathématiques à l'Université de Cambridge, inventeur de la célèbre machine à calculer, pour l'invention de laquelle, il a reçu du gouvernement une récompense de 3000 L. St. vient de publier un ouvrage sur la décadence des sciences en Angleterre, et les causes qui l'ont amenée, qui fait la plus grande sensation. Ce professeur y dénonce des faits et des abus les plus scandaleux. Mr. *South* a fait monter le grand objectif de Mr. Cauchoix, par Mss. Troughton et Jones, en Equatorial de 25 pieds. Il apporte cet instrument à Paris, où il veut s'établir.

Ad. Quetelet: Bruxelles 1830 VI 3. — Je ne partirai de Bruxelles que du 15 au 20 juin*): je passerai une huitaine de jours à Paris et de là je me rendrai à Genève, de sorte que je serai dans votre ville vers le six ou le dix juillet. A cette époque vous aurez probablement terminé l'excursion que vous projetez et Mr. De la Rivé n'aura pas encore fait la sienne. J'apporterai mon petit appareil magnétique; je prendrai aussi avec moi deux aiguilles destinées à Mr. Horner de Zurich. — Les articles de Mr. De la Rive sur l'aigmantation m'ont assez vivement intéressé parceque je me suis beaucoup occupé de ces expériences en attendant la formation de notre observatoire; mais je n'ai rien publié jusqu'à présent. J'apporterai mes résultats qui pourront peut être vous intéresser, car je crois avoir trouvé différens résultats, qui n'étaient pas connus, je pense. Peut être Mr. De la Rive et vous même, Monsieur, vous serez charmé de faire quelques expériences avec moi, si vous en avez le loisir. Mais nous n'en dirons rien à Mr. Bouvard; il m'a déjà tant grondé, que je n'ose plus lui dire que je m'occupe de physiques ou de mathématiques. Je le respecte comme un père, et je tache de ne pas aller trop ouvertement contre les conseils qu'il me donne. Du reste, dès que je serai installé dans l'Observatoire, il n'aura plus rien à me reprocher sur la nature de mes occupations. — J'aurai soin d'aller voir à Paris où en sont vos instrumens. — Mr. Herschel vient de m'écrire que notre équatorial est à peine commencé et que de notre cercle rien n'était fait. Il en a témoigné son grand mécontentement à Mr. Simms, qui a fini par promettre formellement que l'équatorial serait terminé à la noël. Quant au cercle, il n'a pu donner qu'une *espérance probable* qu'il serait fini l'année prochaine. — J'ai reçu il y a quelques jours une lettre fort aimable du célèbre Goethe; elle m'a causé une bien douce satisfaction, car j'avais vû dans mon dernier voyage ce véritable vieillard avec un respect et un plaisir dont rien n'approche.

Zach: Paris, bains de Tivoli 1830 VII 2. Tous ceux qui connaissent Mr. Babbage personnellement sont tout aussi étonné

*) Die beabsichtigte frühere Abreise war durch den Tod seines Schwiegervaters verhindert worden.

que vous, Monsieur, que ce savant si doux et si modeste ait eu le courage de publier un ouvrage dans lequel il révèle sans ménagemens des turpitudes et des injustices scientifiques sans nombre. Mais que dire, si ces révélations fâcheuses, si ces . . . oui, c'est le vrai mot . . si ces délits impardonables sont vrais? et il parait qu'ils le sont, puisque, jusqu'à présent, personne n'a réclamé, personne ne s'est justifié, au contraire, justice a été faite, et on a subi des condamnations. Vous avez raison, Monsieur, de dire que ces disputes fâcheuses doivent nuire aux Savans dans l'opinion publique, mais je ne pense pas, qu'elles puissent faire du tort aux sciences; au contraire je crois que c'est leur rendre service, et les sauver de l'avilissement et de la décadence, vers lesquelles la conduite de *quelques* savans, leur esprit d'intrigue, de cabâle, de côterie, de camaraderie, pourrait les entrainer. Comme M. *Babbage* était du conseil de la Société Royale, et ne pouvant mettre des bornes à ces misérables abus et à ces innombrables malversations, il était, en certaine forme obligé en conscience, de les dénoncer. Quand vous aurez lû son ouvrage, vous changerez peut-être d'avis, surtout si ces dénonciations, comme il parait déjà, auront amené une réforme salutaire et avantageuse aux sciences. Le célèbre chimiste Mr. *Thénard,* vient aussi, dans ce moment, de révéler un fait, dont plusieurs personnes l'ont blamé de l'avoir publié, sous ce même prétexte, que cela fait du tort aux Sciences et aux Savans. D'autres l'ont applaudi, et je crois avec raison, car enfin n'osera-t-on plus signaler les erreurs, les fautes, les forfaits? Voici ce que Mr. Thenard a fait connaitre. Plusieurs chimistes avaient établis par de nombreuses expériences que tous les gaz étant comprimés d'une manière vive et subite, devenaient lumineux. Mr. Thenard a assisté lui-même à des expériences faites à la Société d'Arcueil chez Bertholet, lesquelles semblaient établir ce fait d'une manière incontestable. La croyance de tous les chimistes s'était tellement fondée à cet égard, que tous les ouvrages de chimie en parlent comme d'une vérité établie. Eh bien! Tout cela est faux. Mr. Thenard a entrepris une série d'expériences, dont il a donné connaissance à l'Académie des Sciences; il en résulte que dans les cas observés à la société d'Arcueil, la com-

pression étant faite avec des instrumens enduits de corps gras, la combustion n'avait lieu qu'aux dépens de ces derniers, et n'était point la conséquence de l'incandescence du gaz comprimé. Les expériences faites avec des instrumens privé de toute espèce de corps gras, ont fait voir qu'aucun gaz ne devient lumineux par la pression. — Mr. *Babbage* rapporte dans son Pamphlet, deux faits très-curieux du même genre, qui peuvent servir de pendant à celui dévoilé par Mr. Thenard. Voici comme il les raconte: „Ayant rencontré un jour M. *Wollaston* chez un libraire; je lui proposais la question suivante: Si deux volumes d'hydrogène et un d'oxigène sont mêles ensemble dans un vase, et si par une compression mécanique, ils peuvent être condensés de manière à devenir de la même gravité spécifique comme l'eau, ces gaz s'uniront ils, et se convertiront ils en Eau? Que croyez-vous qu'il en arrivera? me demanda le Dr. Wollaston. Je répondis, que je croyais, qu'ils s'uniront. *Je n'en vois pas la raison,* réprit-il. En lui demandant, s'il pensait qu'il vaudrait la peine de faire cette expérience, il répondit, que *non, puisqu'il était persuadé que l'expérience ne réussirait pas.* Quelques jours après, je proposais la même question à Sir Humphrey *Davy*; il me répondit sur le champ *ils deviendront de l'eau nécessairement;* et sur ma demande, s'il croyait qu'il mériterait la peine de faire cette expérience, il replique, que c'était là une bonne expérience, mais *nullement nécessaire de faire, puisqu'elle doit réussir.*" Quelles contradictions! — Voici un autre fait rapporté et dévoilé par Mr. Babbage: Le Capitaine *Sabine* dans son Ouvrage sur son expédition pour la mesure de la longueur du pendule sous différentes latitudes depuis l'équateur jusqu'au pôle, ouvrage pour lequel il a reçu une recompense de mille livres Sterling, rapporte les latitudes qu'il a observé dans ses différentes stations; or, ces latitudes sont toutes falsifiées.*) Par exemple Mr. Sabine donne ces latitudes de Maranham que voici:

---

*) Ob hiemit die in Zach's Briefe von 1830 V 25 erwähnte Entlassung Sabine's zusammenhängt?

Le 28 Août	par	α Lyrae	2° 31′ 42″,4	au lieu de 22″,0
29 „	„	α Lyrae	43 ,8	31 ,8
29 „	„	α Paon	44 ,5	44 ,0
31 „	„	α Lyrae	44 ,6	42 ,6
31 „	„	α Cygni	42 ,0	39 ,2
2 Sept.	„	α Grue	42 ,2	27 ,4

que M. Babbage a trouvé, en recalculant ces latitudes sur les observations originales de Sabine. Ainsi toutes les autres, et même plus fort: par exemple à Bahia

selon Sabine 12° 59′ 19″,4;	selon Babbage 12° 59′ 21″,4
59 21 ,2	58 49 ,8
59 22 ,4	59 5 ,1

Que répondre à tout cela? Faut-il faire un mystère de ces malfaits? *Non, assûrement pas.* Ce serait conniver, et coopérer à la décadence des sciences. Ces exemples au contraire, renderont les savans plus circonspectes, les engageront de mettre plus de bonne foi dans leurs travaux, et à mieux remplir leurs devoirs. — Mr. *Babbage* reproche, avec justice, à l'Académie des Sciences à Paris, son inaction, son indolence, son retard, à publier ses mémoires. Il rapporte à cette occasion le fait suivant, tiré du Traité de Mr. Herschel sur la lumière, dans l'Encyclopedia metropolitana. M. Herschel en parlant d'un mémoire de *Fresnel* remarque „que ce Mémoire fut lû à l'Institut le 7 Octobre 1816. Un Supplément y fut reçu le 19 Janvier 1818. Un rapport de Mr. Arago y fut lû le 4 Juin 1821, et pendant que tous les physiciens-opticiens en Europe attendaient ce mémoire avec la plus grande impatience pendant sept ans, il n'a pas encore parû jusqu'à présent, il nous est seulement connu par une maigre notice d'un journal périodique.“ — On peut ajouter à cette facheuse notice, le fait suivant plus facheux et plus condamnable encore. Le gouvernement français, comme Vous savez, Monsieur, a été le premier à provoquer, et à proposer au Gouvernement anglais la jonction géodésique des deux observatoires de Greenwich et de Paris pour déterminer leur différence des méridiens. Ces gouvernements avaient nommés, chacun de son côté, les savans qui devaient exécuter ces opérations. Les anglais devaient porter leurs triangles de Greenwich jusqu'à Calais. Le Capi-

taine *Kater,* chargé de ce travail, a publié sa partie dans les Transact. philos. de la Société R. de Londres pour l'an 1829. Le savant français chargé de cette partie en France, doit, après dix ans, encore publier son travail!! Le Capt. Kater. dans son Mémoire publié en grand détail, dit dans une Note qu'il n'a encore reçu, à son grand regret, aucune communication à ce sujet de son colaborateur français. — Mr. Kater, a-t-il eu tort, comme Mr. Babbage, de nous avoir révélé ces turpitudes? On a bien puni Mr. Sabine pour ses fraudes scientifiques, pourquoi n'apellerait-on pas au tribunal de la république des lettres, pour lui faire rendre compte de sa gestion, le savant français, qui a ainsi manqué à son devoir, et on peut dire à sa conscience et à la probité, parcequ'il a été très-bien payé pour ce travail, et qu'en outre il avait engagé les gouvernements à des fortes dépenses faites en pure perte, à moins qu'il ne produise sa tache bien remplie. — Mais je ne finirai pas, si je voulois rassembler tous les méfaits qui se commettent en ce pays, et qui sont à ma connaissance. Il faudrait faire un ouvrage mille fois plus facheux, plus scandaleux, que celui de M. Babbage. Au moins en Angleterre on adultère, on corrige de mauvaises observations *existantes,* en France on les forge, et elles n'existent que par là! — J'ai appris avec beaucoup de plaisir que la construction de Votre nouvel observatoire avance si activement, mais la construction de Vos Instruments marche-t-elle aussi rapidement? C'est la grande question. C'est bien dommage qu'un aussi excellent artiste, comme M. *Gambey,* soit aussi lent. Il y a trois ans, que j'ai vû sa lunette méridienne, pour l'Observatoire de Paris, à l'Exposition des industries nationales, mais elle n'était pas encore achevée; on m'a assuré alors que dans deux mois, cet instrument serait monté, et que je pourrais y faire des observations, etc. Mr. Gambey a reçu pour cette lunette des récompenses, des prix, des encouragemens, l'étoile de la légion d'honneur..... Eh bien, cet Instrument n'est pas monté encore à l'heure qu'il est, pas plus que l'équatorial, qu'on devait aussi monter, il y a trois ans! — J'ai été encore assez heureux d'avoir fait la connaissance personnelle de M. *Quetelet.* Ce savant intéressant et estimable a eu la bonté de venir me voir; il m'a laissé un

grand regret, de n'avoir pu cultiver sa connaissance plus longtems; il n'a fait, pour ainsi dire, que passer par Paris. Je quitterai aussi cette ville, la semaine prochaine. Je me rends d'abord en Allemagne, mais pour peu de tems; car, d'après l'ordonnance de Mr. le Dr. Civiale, je dois passer l'hyver à Hyères. Je reviendrai le printems à Paris, pour me faire *repasser* par Mr. Civiale, car, malheureusement j'ai toujours cette terrible diathèse à former de nouvelles pierres. Je dois toujours être aux aguets, ce n'est qu'à force de vigilance et de précaution que j'évite qu'elles ne puissent prendre de la consistance. — J'étais infiniment charmé d'apprendre. que vous êtes maintenant très-content de l'état de vos yeux, comme ce n'était qu'une inflammation passagère, il n'y a plus rien à craindre, et le bien continuera.

Ad. Quetelet: Paris 1830 VII 3. — J'ai reçu avec le plus grand plaisir le billet aimable que Mr. Bouvard m'a remis de votre part. Malheureusement je ne puis préciser encore le jour de mon départ d'ici pour Genève; je crois néanmoins que ce sera mercredi 8 juillet. Je tacherai de prendre le chemin le plus direct. J'ai appris avec le plus grand plaisir ce que vous me dites de Mr. Larive, dont je désire depuis longtemps faire la connaissance. — Mr. Bouvard est en très bonne santé, ainsi que Mr. Arago. J'ai vû travailler à vos instrumens; vous les aurez à temps. Je compte retourner encore tout à l'heure chez Gambey, que je n'ai pas trouvé la 1re fois à son atelier. — On attendait ici MM. Struve et Schumacher; mais il parait que ce dernier savant est indisposé. C'est au moins ce que m'a dit Mr. le Baron de Zach, que j'ai eu le plaisir de voir. C'est un bien aimable vieillard. Je suis presque certain que je vous dois l'aimable accueil qu'il m'a fait.

Ad. Quetelet: Florence 1830 VIII 21. — Mon cher Monsieur, je ne veux pas quitter Florence, où je me trouve depuis une huitaine de jours, sans vous avoir écrit quelques mots pour vous donner de mes nouvelles et vous remercier encore de l'accueil amical que vous m'avez fait à Genève. — Mr. Necker*),

---

*) Ohne Zweifel Louis Albert Necker de Saussure, damals Honorarprofessor der Mineralogie an der Genfer-Academie.

dont la société m'a été si précieuse dans les excursions que nous avons faites ensemble, a pû vous donner quelques renseignemens sur les directions que nous avons prises après nous être séparés de vous. Le temps nous a été assez favorable; j'ai pu suivre de point en point le petit plan de voyage que nous avions fait et répéter les expériences que j'avais projetées. Mais à notre grand étonnement nous avons trouvé que l'intensité magnétique ne variait guère dans les Alpes, et qu'elle était à peu près la même à Genève, à St. Gervais, à Vaudagnes, à Servoz, sur la mer de glace, à Chamounix, etc. Bonneville semble faire une petite exception, mais comme la diminution d'intensité y est très faible, il faudrait des expériences nombreuses et très précises pour bien constater la différence. Au col de Balme, à Martigny, au grand St. Bernard, à Brigg, au Simplon, à Domo d'ossola, à Sesto Calende, j'ai encore obtenu à peu près les mêmes résultats; mais à Milan les choses ont changé, et j'ai trouvé une intensité horizontale sensiblement plus forte; à Turin mes résultats sont redevenus à peu près semblables à ceux des Alpes. Il m'a paru que c'est surtout la Lombardie et le Piémont qui méritent d'être étudiée pour les différences singuliers d'intensité magnétique qu'on y observe. Il paraît du reste que les différences sont en rapport avec celles qu'on observe pour la déviation du fil à plomb. Mr. Plana, avec qui j'ai fait mes expériences à Turin, a le projet de faire construire un petit instrument semblable au mien et m'a promis d'observer à Turin et dans les environs. Je serais bien charmé que vous ou Mr. La Rive, vous eussiez aussi le loisir de vérifier mes nombres pour Genève, Bonneville et Sallanches. J'ai continué mes observations à Gênes, Pisa, Florence et tout le long de la Côte. — C'est à vous que je dois l'aimable accueil que j'ai reçu de Mr. Plana; vous aviez eu la bonté de m'annoncer avec votre bienveillance ordinaire. J'ai passé quatre à cinq jours de la manière la plus agréable et presque continuellement dans la société de ce savant. J'ai l'espoir de le revoir encore à Venise, à mon retour. — A Milan j'ai été aussi fort bien accueilli par MM. Carlini, Oriani et Cesaris. J'ai déterminé dans cette ville avec MM. Carlini et Frisiani l'inclinaison magnétique qu'on n'y connaissait pas encore.

Nous avons employé à cet effet une aiguille d'inclinaison semblable à celle de Mr. Humboldt, et qui n'avait pas encore été mise en expérience, m'a dit Mr. Carlini. Nous avons été plus satisfaits de nos résultats que nous ne l'osions espérer. L'inclinaison obtenue dans le plan du méridien a été de 64° 16',2, et, en la déterminant par deux observations dans des plans perpendiculaires, 64° 15',6; ainsi la moyenne serait 64° 15',9. — J'ai vû à Florence MM. Inghirami et Pons, dont j'ai été charmé de faire la connaissance. J'ai vû les deux observatoires; l'un, celui du prince où se trouve Mr. Pons, est en assez mauvais état. Mr. Antinois, qui est directeur des collections, m'a dit qu'on en construirait peut être un autre. L'observatoire des écoles pies est en meilleur état et renferme de meilleurs instrumens. Mr. Inghirami est un homme extrêmement actif; malheureusement on ne lui donne pas ce que lui est nécessaire, — il doit se servir d'un chronomètre et d'un compteur à la lunette méridienne. La vue de Mr. Pons est améliorée; on continue toujours à voir la comète, qui est très petite. — Si vous aviez occasion d'écrire à Mr. Horner, veuillez lui dire que j'ai avec moi ses deux aiguilles magnétiques, que je compte lui faire parvenir de Munich. Ma femme vient de m'écrire qu'il a eu la bonté de m'adresser une lettre; je compte lui répondre plus tard. — Je pars aujourdhui pour Rome; j'irai probablement à Naples et à Palerme.

J. Plana: Turin 1830 VIII 29. — J'ai reçu dans son temps votre aimable lettre du 19 Juillet dernier datée des bains de St. Gervais, qui m'annonçait l'arrivée prochaine de Mr. Quetelet. Il arriva effectivement peu de jours après à Turin, où il a séjourné trois jours, ce qui lui a suffi, pour observer les oscillations horizontales de l'aiguille aimantée, et prendre une idée assez claire de tout ce qui peut intéresser un sçavant voyageur. Quant à moi je suis charmé d'avoir fait la connaissance personnelle de Mr. Quetelet, qui réunit les idées éminemment scientifiques avec celles qui plaisent aux gens du monde. Lui, vous et beaucoup d'autres Géomètres, démontrent l'injustice de la satire amère lancée contr'eux par le célèbre Chateaubriand dans le Génie du Christianisme. En vérité, je ne sais pourquoi plusieurs hommes de lettres détestent les Sectateurs de l'Algèbre

et de la Géométrie. *Pater ignosce illis!* — Vers le 15 Sept. nous partirons d'ici pour aller près de Milan à la maison de campagne de Mr. Oriani. Je vais là pour y revoir cet excellent ami, bien digne de sa célébrité comme Astronome: Mais moi j'ai l'avantage de lui connaître des vertus privées, qui le rendent au plus haut degré cher à mon coeur. J'apporterai à Mr. Oriani les trois volumes de ma théorie de la Lune, et dans plusieurs conversations sur le sujet, je lui développerai les différentes parties de cet Ouvrage auquel il a eu la bonté de prendre un vif intérêt. Toutefois je me hâte de vous dire que le dernier Volume n'est pas encore tout-à-fait achevé; il y manque encore une centaine de pages environ.

A. Th. Kupffer: St. Pétersbourg 1830 XI 4. Je profite d'une occasion pour Genève, qui se présente, pour vous adresser le rapport, que je viens de faire à l'Académie de St. Pétersbourg, relativement à mon voyage au Caucase, dont vous avez sans doute déjà pris connaissance par les journaux. Vous verrez dans un des articles, qui le composent, que mes observations sur l'inclinaison magnétique, tout imparfaites qu'elles sont sous ce rapport, conduisent au résultat remarquable, que cet élément du magnétisme terrestre décroit à mesure qu'on s'élève au dessus de la surface du globe. J'ai été agréablement surpris de lire dernièrement dans la bibliothèque universelle, que Vous êtes arrivé au même résultat, par des observations exécutées sur le Mont Bernard. Je désire ardemment de connaître les détails de vos observations, qui ne me sont pas encore parvenus, et Vous m'obligierez infiniment si vous vouliez bien me les communiquer. Dans votre pays montagneux vous trouverez sans doute plus de facilité d'approfondir cet objet, que moi au milieu du pays le plus plat qui existe en Europe. Le détail de nos observations paraîtra l'année prochaine, et formera un ouvrage d'un gros volume, où tous nos travaux se trouveront réunis, tant ceux qui se rapportent à la physique, que ceux qui ont pour objet l'histoire naturelle du pays que nous avons parcouru.

Ad. Quételet: Bruxelles 1830 XI 12. — Je viens de recevoir la lettre affectueuse que vous m'avez adressée relativement à nos derniers évènemens. J'ai été extrêmement sensible à cette

nouvelle marque de bienveillance. Je me trouvais au fond de l'Italie, à Naples, lorsque j'ai reçu la nouvelle de ce qui passait à Bruxelles; je me suis hâté alors de revenir à Rome, où j'ai appris les combats qui ont eu lieu dans l'intérieur de la ville, mais j'ai heureusement appris en même temps que ma femme avait eu le temps de se réfugier à Gand avec ma mère, ma soeur et mes deux petits enfans. Je n'en ai pas moins voyagé nuit et jour, en m'arrêtant seulement à Bologne, à Venise et à Munich pour voir ce qui m'intéressait le plus, car je conservais à peine le désir de voir les choses, qui se rattachent le plus immédiatement à mes études. Je suis arrivé à Bruxelles au commencement de ce mois et j'y ai trouvé ma famille, qui était revenue depuis la veille; elle était heureusement en bonne santé. Je n'en avais pas reçu des nouvelles depuis Rome. J'ai trouvé la physionomie de notre ville extrêmement changée; les rues, encore à présent, sont dépavées en partie: plusieurs barricades subsistent encore; on n'a pas eu le temps de réparer les maisons qui ont été le plus exposées au feu. Quant à l'observatoire, où s'était réfugié un parti de Liégeois qui s'y sont défendus près d'un jour, il n'y a pas considérablement souffert. Un grand nombre de balles ont percé les boiseries, cassé les carreaux, ou entamé les murs, mais rien n'a été renversé. Le sang a coulé en plusieurs endroits, on en voit encore les traces. Maintenant, à cause de l'importance de la position, on a entouré l'édifice de retranchemens et de canons. J'espère que nos affaires pourront s'arranger sous peu, et que le pays reprendra sa tranquillité. On ne peut cependant encore rien dire sur l'avenir: Les passions sont encore bien agitées; les partis s'observent, mais la généralité ne demande que la paix. Tout le monde est provisoirement sous les armes. — L'intérêt que vous me témoignez, m'est un bien précieux dans la position où je me trouve. Après tant de peines et de travaux, j'ai été à la veille de voir ruiner l'objet de toutes mes espérances, le fruit de douze ans de travail; car il a fallu surmonter bien des difficultés avant de parvenir à faire comprendre l'utilité d'un observatoire. Maintenant il parait que la même question est encore revoquée en doute, et malheureusement par plusieurs personnes, avec lesquelles j'étais le plus

lié, celles qui sont maintenant à la tête des choses. Les idées systématiques sont surtout déplorables parmi des personnes, qui ont des connaissances d'ailleurs et qui ont le pouvoir en main. Je puis n'avoir que des craintes exagérées, et je prie le ciel qu'il en soit ainsi; mais les personnes que je voyais le plus sont justement celles dont les noms vous sont actuellement le plus connus par nos évènemens. J'ai donc été dans le cas de parler souvent avec elles de ce qu'un gouvernement doit faire pour développer les connaissances. Je vous dirai entre nous que la plupart sont d'avis que le gouvernement n'a rien à faire, que les professeurs doivent *vendre* leurs leçons comme un cordonnier vend ses souliers, que les diplomes sont inutiles, et que chacun peut exercer le droit ou la médecine sans permission préalable, que le premier venu peut ouvrir une école, que celui qui veut faire de l'astronomie, n'a qu'à s'acheter des instrumens, etc. Vous sentez où ces idées peuvent conduire la science, et vous comprenez que nos meilleurs professeurs ne tarderont pas à nous quitter si l'on veut réaliser de pareils rêves. Du reste la nation aurait toujours à prononcer sur de pareils objets, mais on exerce une grande influence avec les mots à la mode: *gouvernement à bon marché*, etc. Le mal est que les hommes veulent toujours se placer dans un monde imaginaire, et refusent de voir les choses telles qu'elles sont. Je n'ai maintenant de consolation que celle que je reçois de ma famille et des savans étrangers. Mr. Bouvard, Mr. Encke, Mr. Schumacher m'ont donné des témoignages précieux de leur bienveillance, votre lettre m'en offre encore, et j'avoue que je prends ainsi mon mal plus en patience. — Je ne vous dirai rien aujourdhui des résultats de mon voyage; mon esprit est trop occupé par d'autres objets. Mais je me rappellerai toujous avec reconnaissance le séjour que j'ai fait à Genève. (Forts. folgt.)

[R. Wolf.]

Zur Geologie Egyptens

von

Prof. **Mayer-Eymar.**

Als ich Ihnen, verehrte Anwesende, für den heutigen Abend einen Vortrag über die Geologie Egyptens ankündigte, befürchtete ich fast, mit diesem kurzen und desshalb vielleicht zu viel versprechenden Titel, nicht Wenige von Ihnen von dem Besuche unserer Sitzung abzuschrecken; Ihre so zahlreiche Anwesenheit indessen lässt mich ersehen, dass Sie mir zutrauen, auch bei meinen heutigen Mittheilungen Mass zu halten und mich darauf zu beschränken, wenige Punkte aus der Geologie des Nillandes, welche von grösserer Wichtigkeit sind und meine eigenen Beobachtungen betreffen, sowie nur das Interessanteste und Schönste aus der Fülle meiner Aufsammlungen, als Belegstücke zu meinen Aussagen, Ihnen vorzuführen. Indem ich Ihnen für dieses Ihr Vertrauen meinen Dank abstatte, will ich Ihnen, zu Ihrer vollständigen Beruhigung, zum Voraus melden, dass mein Vortrag nur die vier Punkte betreffend: ein neues Kreide-Vorkommen, im Nordwesten der grossen Pyramiden, den Grobkalk des Mokattam-Berges, die Geyser-Bildungen und das Diluvial-Meer Egyptens, und zwar nur das zweite Thema etwas ausführlicher, behandeln wird.

Zunächst indessen fühle ich mich verpflichtet, Ihnen die Gründe anzugeben, welche mich schliesslich bewogen haben, eine so weite Reise, wie die eben vollbrachte zu unternehmen, trotzdem ich mir deren Kosten und Schwie-

rigkeiten übertrieben gross vorstellte. Die Sache hat folgende Genesis: Als, im Jahre 1874, der bekannte Afrika-Reisende, Dr. Rohlfs, im Auftrage des damaligen, ebenso energischen als fortschrittlich gesinnten Chedifs Ismaïl Pascha, eine grosse Untersuchungs-Reise über die Oasen des westlichen Egyptens unternahm, schloss sich ihm Professor Karl Zittel als Geolog an und es heimste derselbe, während dieser viermonatlichen Reise, so viele, meistens neue Kreide- und Tertiär-Petrefakten aus jenen noch von keinem Fachmanne besuchten Gegenden ein, dass er den Entschluss fasste, ein grosses Werk über die Paläontologie Egyptens zu publiziren. Da indessen das Zittel zur Verfügung stehende Material in Berlin, München und Zürich bereits zu gross war, um von ihm allein, es wäre denn in einer langen Reihe von Jahren, bearbeitet werden zu können, suchte er sich eine Anzahl Mitarbeiter aus und so entstanden, während er die 1884 erschienene geologische Einleitung zum gemeinsamen Werke schrieb und sich auf die Beschreibung der Kreide-Petrefakten vorbereitete, die bereits herausgekommenen Monographien der Nummuliten, durch de Laharpe in Lausanne, der tertiären Seeigel, durch de Loriol in Genf und der Fauna des oberen Helvetian von Siuah und Suez, durch Fuchs in Wien. Mich aber ersuchte Zittel, bei unserer Zusammenkunft in Foix, 1882, so dringend um die Uebernahme der Bearbeitung der eocänen Mollusken, dass ich ihm schliesslich zusagte, hauptsächlich mit Rücksicht auf die doch sonst mir zukommende Bestimmung der ebenso schönen als zahlreichen Petrefakten aus dem Grobkalke des Mokattam, welche die Zürcher Sammlungen der wiederholten Liberalität des Herrn Dr. Hess in Cairo verdanken.

Aber nun erst, als ich Zittel's Zusendung durchmustert und mit unserem Material von Cairo verglichen; nachdem ich, nachher die stratigraphische Uebersicht des Eocäns Egyptens, wie sie in der citirten Einleitung gegeben ist, gelesen; nachdem ich endlich auch von Schweinfurth's Aufsatz über die Stratigraphie des Mokattam-Berges in der Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft, 1883, Einsicht genommen, erkannte ich die Schwierigkeit der übernommenen Aufgabe, und zugleich, dass ich mich schwer getäuscht hatte, als ich, auf Grund der Hess'schen Sendungen, annahm, dass der Cairenser Grobkalk nur dem unteren Parisian des Pariser Beckens oder der Ostschweiz entspreche. Da indessen sowohl die Etiquetten der vorliegenden Sammlungen nur die Bezeichnung »Mokattam-Stufe« führten, als Herrn Schweinfurth's Klassifikation zwar die Zweitheilung des Cairenser Parisian und dessen Gliederung in eine Anzahl wohlbezeichneter Schichten festsetzte, aber nicht ohne Weiteres mit der von Michelot längst fixirten Eintheilung des Pariser Grobkalkes in zwei Mal fünf Schichten in Uebereinstimmung zu bringen war, so entschloss ich mich, theils in der Absicht noch mehr Material, besonders an gänzlich mangelnden, kleineren Arten, für die vorzunehmende Arbeit zu sammeln, theils zum Zwecke, wo möglich die respektiven Niveaux festzustellen, aus denen die zugesandt erhaltenen Petrefaktenarten stammen, selber nach Egypten zu gehen und mir die dortigen stratigraphischen Verhältnisse des Parisian genau anzusehen. Wie nöthig aber diese Untersuchung für die streng wissenschaftliche Durchführung der übernommenen Monographie war und wie wichtig sie für unsere Kenntniss der Grobkalk-Stufe überhaupt werden dürfte, werden Sie, meine Herren, aus den folgenden Ausführungen ersehen.

Nach diesem Aufschluss über Grund und Zweck meiner Reise gehe ich zu meinem eigentlichen Thema über.

Kaum ein zweites, grösseres Land dürfte einen so einfachen geologischen Bau aufweisen, wie das eigentliche Egypten. Dessen tertiäre Schichtenfolge, insbesondere, erinnert in der That, durch die Gebirgsformen und die horizontalen oder nur schwach geneigten Lagen, an den bekannten, einfachen Aufbau der schwäbischen Alp. Dieses Tertiär-Becken, natürlich ein Meeresarm des alten Mittelmeeres, mag ursprünglich seine südliche Spitze noch ziemlich weit über Assuan hinaus gehabt haben, denn noch um diese Stadt besteht die zweite Plateaux-Stufe aus untereocänen Gebilden. Im Osten aber wurde es durch den krystallinischen Gebirgszug begrenzt, welcher sich längs des Rothen Meeres und fast bis Suez erstreckt, während es im Südwesten, flachufrig, von den jüngsten Kreidebildungen eingerahmt war, im Westen aber bis nach den Bergen des Fezan und dem Tripolitanischen sich erstreckt haben dürfte. Das deutlich en retrait über dem Untereocän lagernde Parisian aber, mit welchem wir uns spezieller zu beschäftigen haben werden, mag seine südliche Grenze vor Siut, wo es bereits über dem Londinian fehlt. in den Hügelzügen Djebel Mekeireh und Djebel Kiauleh haben, um von dort an sich, rechts an das krystallinische Gebirge anzulehnen, links aber, in nordwestlicher Richtung auf das Londinian folgend, bis zur Grenze der Cyrenaica zu reichen. Doch bevor ich eingehender auf dieses durch seine vielen Versteinerungen altberühmte Parisian zu sprechen komme, sei mir vergönnt, über meine Entdeckung einer grösseren Kreide-Insel in der terra incognita westlich von den grossen Pyramiden zu berichten, da dieses Kreide-Vorkommen

nicht nur an und für sich interessant, sondern auch für die Geopragmatik des egyptischen Tertiärs nicht unwichtig sein möchte.

Nachdem ich, die zwei ersten Wochen meines Aufenthaltes in Cairo hindurch, fast täglich zum nahen Mokattam gegangen oder auch geritten und schon am ersten Tage die grosse Freude gehabt, zu constatiren, dass der dortige untere Grobkalk genau in die gleichen fünf Abtheilungen zerfällt wie der Pariser, ging's, am 5. Januar, mit dem jungen Zoologen, Herrn Alfred Kaiser aus Rorschach, drei Eseln und zwei Eseltreibern für zwei Tage in die libysche Wüste hinaus, die schöne Austernbank incertae sedis, welche Herr Dr. Schweinfurth ein Jahr vorher im Nordwesten der Pyramiden entdeckt hatte, aufzusuchen. Wir nahmen unsern Weg längs des südlichen Fusses des eine Stunde nördlich von den Pyramiden hervorragenden und weithin sichtbaren weissen Grobkalk-Riffs, in der Hoffnung, an dessen Nordwest-Ende entweder auf das Untereocän, oder im Gegentheil auf jüngeres Eocän (Bartonian etc.) zu stossen. Schon nach anderthalb Stunden indessen, während welchen wir mehr oder weniger mühsam über die erhärteten, ruppigen Sandkalke des oberen Parisian oder über Sand- und Feuersteinsplitter-Flächen und Halden geschritten, trafen wir bei einem Aufstieg einen breit entwickelten, bläulich-weissen Thon mit Feuersteinconcretionen an, über welchen endlich auf einem kleinen Plateau, wo wir Mittagsrast hielten, ein weisslicher Kalk mit Durchschnitten von Nerineen und Acteonellen anstund. Ich sprach sogleich die Vermuthung aus, dass wir da ein der Gosau-Kreide analoges Senonian vor uns hätten. Und in der That, als wir unsern Weg in nordwestlicher Richtung fortsetzten, fanden wir auf einem

Plateau-Grat vom gleichen Kreidekalk eine Menge guter und schlechter Steinkerne, darunter, neben einigen solchen der eben erwähnten Gattungen, viele Cucullaeen, Cardien und Pholadomyen, welche ich mich erinnerte, in Zittel's »Gosau-Bivalven« abgebildet gesehen zu haben. Abends aber, als wir im Felsenlabyrinth, wo wir uns befanden, einen überhängenden Felsen aufsuchten, um unser Nachtlager aufzuschlagen, fanden wir einen ganz passenden solchen in einem Thälchen, wo just ein Riff mürben Kalkes mit einer Unzahl meist gut erhaltener Acteonellen und Nerineen gleicher Art wie vorher, geschützt durch eine Dachschicht von Porites-artigen, kugeligen Corallen, unserer Ruhestelle gegenüberstund. Die jetzt grossentheils bereits durchgeführte Bestimmung der an diesem Tage und am folgenden Morgen bis acht Uhr gesammelten, ganz sicher dem gleichen Niveau angehörenden Petrefakten nun erlaubt mir den bis jetzt betrachteten, wenigstens eine Quadratstunde grossen Kreide-Flecken, zwischen zwei und drei Stunden im West-Nordwesten der grossen Pyramiden, als (den Thon) unteres und (den Kalk) oberes Senonian zu erklären, indem seine häufigsten, hier vorliegenden Arten sich als folgende erweisen: Cucullaea Chiemensis, Gümb. (Senonian II), C. Ligeriensis, Orb. (Turon. II — Senon. II), C. tumida, Orb. (Senon. II), Cardium productum, Sow. (Cenom. II? — Senon. II), Pholadomya Royanensis, Orb. (Senon. II — Danian I), Nerinea Buchi Keferst. (Cerith.) (Senon. II), N. nobilis? Münst. (Senon. II), N. pyramidarum, May.-Eym. (neu)*) und Acteonella

*) Diese schöne, grosse Art steht den N. nobilis und Buchi nahe und also in der Mitte zwischen Beiden. In der Jugend nämlich trägt sie ähnliche Querrippen wie letztere Species, nur viel

Voluta, Münst. (Tornat.) (Senon. II), also merkwürdigerweise fast lauter solche, welche auch im Santonin der Gosau bei Salzburg häufig sind.

Am folgenden Morgen zogen wir in nordwestlicher Richtung, in welcher auch die wohl vierzig Meter mächtigen Kalkschichten sanft fielen, auf die Suche der Schweinfurth'schen Austern-Mergeln, indem Herr Kaiser,[1] der bei deren Entdeckung gegenwärtig gewesen war, wusste, dass sie auf der rechten, also unserer Seite des Trockenthales im Norden des angezogenen Grobkalk-Riffes lagerten. Und in der That, nach einer halben Stunde Irrens nach Verlassen unseres in jenes Wadi einmündenden Senonian-Kalk-Thälchens, hatten wir auf einer jener durch eine etwas härtere Bank bedingten, niedrigen Querbarren, welche von den Kalkhügeln links gegen jenes Wadi strichen, die ersten Austernschalen aufgelesen und wir fanden schliesslich in einer weiteren halben Stunde genug schöne, doppelklappige Exemplare beider Arten, um befriedigt an die Rückreise, den Pyramiden zu, denken zu können.

Leider konnte ich bis jetzt die Austern nicht bestimmen, indem uns in Zürich Coquand's grosse und theure Monographie der Ostreen des Kreide-Systems annoch fehlt und keine der in desselben Province de Constantine, in Goldfuss' Petrefacta, Nilson's Petrefacta suecana, d'Orbigny's Paléontologie française, Sowerby's Mineral Conchology und Zittel's Gosau-Bivalven abgebildeten Austern zu denselben gut passen.*) Indessen ist die Be-

---

schwächere und gedrängtere, wird aber frühzeitig glatt. Dann unterscheidet sie sich von N. nobilis durch ihre etwas concaven, oben leicht gerandeten Umgänge mit welligen Querstreifen und Tendenz zu Queranschwellungen. Sie ist sehr häufig.

*) Die einte, häufigere Art gehört zur Reihe der O. hippopodium, Nils. und steht der O. rarilamella aus dem Eocänen

stimmung dieser Arten in unserem Falle nicht nöthig, um ihr Niveau festzusetzen, denn das Vorkommen mit ihnen, nicht bloss der Cucullaea Chiemensis und der Plicatula aspera, Sow., von der Gosau, sondern auch der Nerinea pyramidarum, als Abdruck auf der Ansatzfläche der Ostrea pes-cameli, beweist, dass ihr Muttergestein auch noch dem oberen Senonian oder Santonin und nicht schon dem unteren Danian oder Meudonon*) angehört.

Da nun Collega Schweinfurth, welcher seinerzeit das besagte, die Caravannen-Strasse von Cairo nach Siuah beginnende Wadi heraufgekommen war, nach Ausbeutung der Austern-Mergeln umkehrte, ohne das Alter dieser und der Kalkhügel zur Rechten als cretacisch und obersenonisch erkannt zu haben, so darf ich mich rühmen mit Freund Kaiser, der Entdecker des ganzen betreffenden obercretacischen Schichtencomplexes zu sein, und erlaube ich mir, diese Kreideinsel im Eocänen der Pyramiden-Wüste die Schweinfurth-Hügel zu nennen.

* * *

---

ganz nahe, nur ist sie etwas kleiner, weniger gewölbt und hat sie mehr Rippen. Ich nenne sie auf's Gerathewohl Ostrea pes-cameli. Die zweite Art, eine Hahnenkamm-Auster, kömmt durch ihre längliche Form der O. dichotoma, Bayle, aus dem Santonin Algeriens nahe, doch ist sie nicht ganz so schmal und hat sie weniger, unregelmässigere und stachlige Rippen. Wenn sie neu ist, soll sie O. (Alectryonia) Schweinfurthi heissen.

*) Auf den Rath Herrn Tardy's, des bekannten Astronomen und Geologen in Bourg-en-Bresse, hin und um den vielseitigen Klagen, dass die vielen Unterstufen-Namen mit gleicher Endung auf *—in* so schwer zu memoriren seien, gerecht zu werden, schlage ich hiemit vor, die Namen der ersten Unterstufen auf *—on*, italienisch *—one*, endigen zu lassen, welche Endung, sachgemäss, auf ein grösseres Kleines als die Endung *—in*, *—ino* hindeutet.

Ich komme nun zum Hauptthema meiner heutigen Mittheilung, über den egyptischen Grobkalk zu sprechen. Es wäre diess freilich ein überaus grosses Thema, wollte man es der Wichtigkeit und dem Petrefakten-Reichthum jenes Gebildes angemessen besprechen. Zum Glücke darf ich mich aber, diessmal, darüber um so kürzer fassen, als ich ja verpflichtet bin, dasselbe in der Einleitung zur übernommenen Monographie ausführlicher zu behandeln.

Als ich nach Cairo kam, kannte ich das dortige Parisian nur aus den in Zürich liegenden Sammlungen, aus Zittel's Einleitung zur Paläontologie Egyptens und aus Schweinfurth's Aufsatz über den Mokattam, in der Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft, 1883, indem ich es bis dahin vernachlässigt hatte, die ältere Litteratur über jenen Gegenstand, wie sie von Zittel ausführlich aufgezählt wird, und namentlich Fraas' Buch »Aus dem Orient« mir näher anzusehen. Desto besser kannte ich den typischen Grobkalk, aus eigener Anschauung sowohl, als aus den vielen Schriften darüber. Gross war daher meine Freude, als ich, bei meinem ersten Besuche der Steinbrüche-Region, an der Westseite des Mokattam, gleich ersah, dass die fünf Abtheilungen des Pariser unteren Grobkalkes auch hier jenen höchst analog vorhanden seien. Noch grösser aber war, einige Tage später, mein Erstaunen, als ich Fraas' Buch »Aus dem Orient«, welches mir Herr Dr. Sickenberger, der gelehrte Direktor des botanischen Gartens und Freund der Geologie in Cairo, inzwischen sammt Schweinfurth's erwähntem Aufsatz geliehen, bei'm Capitel III, Die Tertiär-Länder am Nil, aufschlug und Seite 113 lesen musste, »dass die Züge des Gebirges sich im Einzelnen unbekümmert um die französische Chablone frei entwickelt haben«. Jetzt

begriff ich erst, warum weder Zittel noch Schweinfurth, bei ihrer Darstellung des geologischen Bau's des Mokattam, sich auf eine Vergleichung seiner Schichten mit denjenigen des Pariser Grobkalkes eingelassen hatten. Durch die Boutade meines geistreichen Freundes verführt, hielten sie eben eine solche genauere Parallelisirung für unausführbar und deren Versuch also für zwecklos. Und so ist mir, dem Spätgekommenen, die Ehre zu Theil geworden, die räthselhafte und wichtige Thatsache der vollkommenen Uebereinstimmung des Pariser und des egyptischen Grobkalkes, in ihrer Zusammensetzung aus zwei Mal fünf Abtheilungen, hiemit zuerst bekannt zu machen und, wie ich hoffe, widerspruchlos zu beweisen.

Es ist das Verdienst des Pariser Ingenieurs Michelot, zuerst und schon 1855, im Bulletin der französischen geologischen Gesellschaft, eine begründete Eintheilung des Grobkalkes des Pariser Beckens gegeben zu haben. Nachdem ich meinerseits diese Eintheilung um Epernay, Reims, Chaumont und Paris controlirt und als zugleich natürlich und praktisch erkannt, gab ich sie in meiner Tabelle vom Jahre 1869: Tableau synchronistique des terrains tertiaires inférieurs, mit den einzigen Aenderungen wieder, dass ich statt der Titel Calcaire grossier inférieur und supérieur, consequent die Unterstufen-Namen Couches de Chaumont und Couches de Grignon vorschlug, die nur zu Paris entwickelten Roche de Paris und bancs francs, welche die gleiche Faunen-Mischung wie die Caillasses coquillières aufweisen, zu diesen schlug und alle so erhaltenen zehn Abtheilungen mit Lokalnamen versah. Diese Tabelle versandte ich in gegen dreihundert Exemplaren vorzugsweise an die Tertiärgeologen. Auf dem mir gebliebenen und hier

vorliegenden Exemplare davon aber steht unter der Rubrik IV. Etage parisien, Columne b, N. et C. de la France, folgende meist von Michelot herrührende Eintheilung des Pariser Grobkalkes zu lesen: I, a, Glauconie grossière (Couches du Vivray); I. b, Couches à Nummulites (Couches de Nesles); I, c, Bancs durs (Couches de Vaugirard); I, d, Couches à Cerithium giganteum (Couches de Damery); I, e, Banc royal et vergelés du N.-E. du bassin parisien (Couches de St. Maximin); II, a, Banc marin du bas, de l'Aisne (Couches de St. Nom); II, b, Banc vert, calcaire d'eau douce de Provins etc. (Couches de Provins); II, c, Banc marin du haut, de l'Aisne, dit Cliquart (Couches de Laversine); II, d, Caillasses coquillières, roche de Paris et bancs francs (Couches de Paris) und II, e, Marnes et caillasses sans coquilles (Couches de Nanterre).

Nach dieser nothwendig gewesenen Zugrundelegung der den Pariser Grobkalk betreffenden Klassifikation gehe ich nun zur Vergleichung damit seines fast eben so berühmten egyptischen Aequivalents über.

Das egyptische Parisian lässt sich, wie Schweinfurth und Zittel gezeigt, in zwei schon an der verschiedenen Farbe trennbare, ungefähr gleichwerthige Theile scheiden, nämlich eine untere, kalkigere, von weisslicher Farbe und eine obere, kieselreichere, mit gelber bis brauner Färbung. Am Mokattam nun sowohl als bei Minieh beginnt, über dem an letzterem Orte eine erste Terrasse bildenden oberen Londinian, das Parisian I mit einem zehn bis fünfzehn Meter mächtigen, am ersten Orte grünlich-weissen, mehr oder weniger kieselreichen, in Grus zerfallenden Kalke, mit eingesprengten, kleinen, schwarzen Glaukonitkörnern, wie man sieht, durchaus das

Analogon der bis zwölf Meter mächtigen glauconie grossière: Parisian I, a. Diese erste Ablagerung schon ist am Mokattam meistenorts ganz erfüllt mit den kleinen Nummuliten, N. Beaumonti, Arch. und N. Schweinfurthi, May.-Eym. = N. sub — Beaumonti, Laharpe (vox barbara), während grössere Arten als die nicht seltene N. discorbina, Schloth. (Lenticul.) hier noch fehlen. Sie führt, besonders in den mittleren Partien, eine ungeheure Menge Stacheln von zwei Seeigel-Arten: Porocidaris Schmideli, Münst. (Cid.) und Rhabdocidaris itala, Laube und Asseln eines grossen Seesternes, Astropecten Micheloti*), May.-Eym., dann, in mässigerer Zahl, eine nette Bäumchen-Coralle, Stylophora Chaliforum, May.-Eym.**) und Röhren eines grossen Sandbohrwurms, Teredo (Septaria) aegyptiaca, May.-Eym. Hier auch macht sich, in einer zwölf Centimeter dicken Schicht, die kleine Ostrea punctata, Desh.***) durch massenhaftes Vorkommen auffallend. Gegen oben endlich enthält diese Abtheilung, in grossen Nestern oder Ellipsen vertheilt, eine reiche Molluskenfauna, leider fast nur in Steinkernen erhalten, wovon die häufigsten Arten: Velates Schmideli, Terebellum sopitum und Natica caepacea, Einem auf Schritt und Tritt begegnen. Daneben kommen hier noch häufig vor eine Menge Pariser Lucinen, so die grossen L. gigantea, Escheri und mutabilis und Naticen, darunter die riesige N. hy-

---

*) Unterscheidet sich von A. Petrobonensis, Zigno (Asterias), emend., aus dem Bartonian II von Priabona, durch seine viel grösseren Hauptasseln.

**) Viel kleiner als die ähnlichen St. annulata und distans.

***) Unterscheidet sich, aber nur als varietas rhabdophylla, May.-Eym., durch ihre stärker und weniger schief gefaltete Unterklappe. Sie sitzt gewöhnlich den Seeigel-Stacheln auf.

brida und die kleineren N. patula, N. sigaretina und N. conica. Hier auch und nicht höher ist das Hauptlager des riesigen Cerithium Cairense, May.-Eym., welches schon fälschlich als C. giganteum citirt worden ist, hingegen dem C. cornucopiae näher steht.

Wie im Pariser Becken, die glauconie grossière durch die fuss-dicke Bank der Nummulina laevigata I, b, abgeschlossen wird, so folgt am Mokattam, wie bei den grossen Pyramiden und bei Minieh, auf den eben betrachteten Kalk, eine Meter bis drei Meter, ja bei Minieh, wie dieser, zehn Meter mächtige Bank voll grosser Nummuliten, N. Gizehensis, Forskal (Nautilus) worin die zwei genannten, kleinen Arten und selbst die oft ebenso häufige N. discorbina stellenweise unter der Menge fast verschwinden. Wie bei Paris, ist diese Haupt-Nummulitenbank sonst petrefakten-arm, ausser vielleicht in ihrem mittleren Theile, bei Minieh, wo merkwürdigerweise unter Anderm eine Alveolinen-Art (A. stercus-muris, May.-Eym.)*) häufig ist, während die Gattung in Egypten sonst nur im Londinian vorkommt.

Das als Hauptniveau der Seeigel Amblypygus dilatatus, Echinanthus Cuvieri, Echinolampas calvimontanus, Pygrorhynchus Grignonensis etc. bekannte, acht bis zehn Meter mächtige Lager, I, c, des Pariser Grobkalkes hat wiederum sein perfektes Aequivalent im ebenfalls um die zehn Meter mächtigen Cairenser Baustein über der dicken Bank der Nummulina Gizehensis. Diese neue Abtheilung beginnt mit einer dünnen Schicht voll Ostrea (Gryphaea) Gümbeli, May.-Eym., var. biauriculata oder Mokattamensis

*) Aehnlich der Al. oblonga, weniger cylindrisch, längs schwach gerunzelt.

und endigt mit einer gleichfalls dünnen Lage Turritella imbricataria. Sie ist, im Vergleiche zu I, a und gar I, d, arm an Petrefakten-Arten zu nennen, ganz wie das Pariser I, c im Verhältniss zu I, a um Chaumont und I, d bei Reims und Epernay. Ihre schönste Versteinerung ist ein ziemlich häufiger Krebs, Lobocarcinus Paulino-Württembergensis, Mey. (Cancer). Was sie aber auszeichnet und ihr eine weitere, merkwürdige Analogie mit den Schichten von Vaugirard verschafft, das ist ihr Reichthum an Seeigeln. Hier in der That kommen nicht nur die grösseren Echinolampas africanus, E. ellipticus?, E. Fraasi und die mittelgrossen Schizaster Mokattamensis, Sch. foveatus, Sch. Jordani häufig vor, sondern auch nicht selten die schönen Echinopsis libyca und Euspatangus formosus. Hier gleichfalls ist das Lager des riesigen Conoclypus conoideus, von welchem zwei Prachtstücke billig zu kaufen und eines selber aus der Gryphaen-Schicht zu meisseln ich das Vergnügen gehabt habe, während die Art bis anhin nicht aus dem Parisian des Mokattam bekannt war. (Denn was Fraas so nannte, sind nach de Loriol die Echinolampas africanus und Fraasi.)

Die Schichten mit Cerithium giganteum der Champagne bilden bekanntlich, nach dem unvergleichlichen, oberen Grobkalk von Grignon, das Haupt-Petrefaktenniveau des nordfranzösischen Parisian und namentlich ist es die circa zwölf Meter tiefe Schlucht hinter Damery, welche zeitweise eine fabelhafte Menge schöner Conchylien, von vielleicht dreihundert verschiedenen Sorten, liefert. Auch am Mokattam nun folgt auf den weichen Baustein, mehr oder weniger unvermittelt, eine freilich nur ein bis zwei Meter mächtige, kieselreichere

und härtere Schicht (entsprechend der Gastropoden-Schicht von Steinbach bei Einsiedeln), welche aus einem wahren Conglomerate von Schalen-Kernen und Abdrücken besteht. Dank dem feinen Cemente des Gesteins lassen sich hier, besonders in der Nähe der nördlichen Kalköfen, ganz saubere Steinkerne und Abdrücke der verschiedensten Arten herausschlagen, welche wohl zur Hälfte bei Damery häufigen Species angehören, zum Theile aber Egypten eigenthümlich sind. Von diesen häufigeren Pariser Arten kann ich gleich citiren: Corbula gallica, Cytherea Parisiensis, C. nitida, C. nitidula, Cardium obliquum, Lucina Fortisi, Fimbria lamellosa, Arca angusta, A. planicosta, Bulla Brongniarti, Xenophora agglutinans, Natica patula, N. sigaretina, Rostellaria fissurella, Harpopsis stromboides, Harpa Baylei, Cassidaria nodosa, Cypraea elegans und Voluta spinosa, schon genug um eine speziellere Affinität dieser Fauna mit derjenigen des I, d der Champagne zu beweisen.

Als Abschluss des unteren Grobkalkes endlich haben wir am Mokattam, entsprechend den vergelés und dem banc royal der Champagne und dem Wuhrsteine von Steinbach, eine eilf bis vielleicht (hinter den Pulverhäusern) zwanzig Meter mächtige Ablagerung weicheren Kalkes, mit wiederum ärmerer Fauna, deren häufigste Arten, Cytherea aegyptiaca, C. Parisiensis, Lucina Volderi, Dentalium africanum, Siliquaria longissima, Bulla Brongniarti, Cassis nilotica und Cypraea elegans lauter Ueberbleibseln der Fauna von I, d sind. Mitten durch diese oberste Abtheilung läuft an verschiedenen Stellen eine fuss- bis über einen Meter dicke Bryozoen-Bank, vielleicht nur aus der, also ganz

fabelhaft entwickelten, Eschera Duvali, Mich. (Flustra)*), mit stark zurücktretenden Nummulina Beaumonti und discorbina, zusammengesetzt. In den obersten Schichten dieser Abtheilung aber zeigen sich überall, mehr oder weniger häufig, hörner-förmige Seepflanzen-Stengeln, nach denen Schweinfurth diese oberste Lage die Hörnerschicht benannt hat.

Die obere Hälfte des Mokattam-Grobkalkes, wie des egyptischen Parisian überhaupt unterscheidet sich, wie bereits gesagt, schon durch ihre gelbe oder braune, von schwachem Eisengehalte herrührende Färbung, dann durch Thonbänke und mit diesen abwechselnde, kieselreichere Kalkbänke, in paläontologischer Beziehung aber durch das bankweise Auftreten einer kleinen Anzahl dem dortigen unteren Parisian theils gänzlich, theils fast gänzlich fehlender, prägnanter Arten, nämlich von Agassizia gibberula, Echinolampas Crameri, Ostrea (Alectryonia) Clot-Beyi, O. elegans, O. Reili, Carolia placunoides und Plicatula polymorpha — bei fast gänzlichem Verschwinden der tieferes Wasser beanspruchenden Nummuliten — scheinbar in bedeutendem Masse von diesem. Sie bildet übrigens, am Mokattam, auch orographisch, einen eigenen Abschnitt, indem sie, Dank den leicht verwitternden Thonen, womit sie beginnt, auf der West- und Süd-Front des Berges, so zu sagen, einen Aufsatz auf dem Plateau des Parisian I, e darstellt.

Wenn nun auch im Ganzen nicht so scharf abgetheilt wie das untere Parisian, lässt sich das obere, so-

*) Wenn, wie ich glauben möchte, diese Eschera doch nicht die wahre E. Duvali, von Vaugirard ist, wegen ihren gewölbteren Blättern und ihrem weniger hervortretenden Poren-Netz, so dürfte sie füglich, nach dem Entdecker ihrer Schicht, E. Schweinfurthi heissen.

wohl am Mokattam als am Westufer des Qerun-Sees, in eine kleine Zahl Schichtencomplexe zerlegen, welche nothwendig und zugleich auffallend gut den Unterabtheilungen des Pariser oberen Grobkalkes entsprechen. Hier, in Folgendem, der Beweis meiner Aussage.

Der obere Grobkalk debutirt in der Champagne mit 1 bis vielleicht 3 Meter rosenrothen, kalkreichen Kieselsandes mit rein mariner Fauna, welche sich durch die grosse Häufigkeit vieler ihrer kleinen Arten auszeichnet. Aehnlich beginnt am Mokattam das Parisian II mit einer bis eilf Meter mächtigen Serie von abwechselnden, gelben, grauen oder violetten Thonschichten und braunen oder hellvioletten bis weissen Kalksandstein-Bänken, welche letztere eine unerschöpfliche Meeresfauna darbieten, deren Facies (Vorherrschen gewisser Corbulen, Mactren, Cythereen, Cardien, Arca, Pectunculus und Turritellen) ganz mit derjenigen der gleichzeitigen, marinen Pariser Fauna übereinstimmt.

Diese durch das mittelgrosse Cardium Schweinfurthi bezeichnete Abtheilung enthält zwar, sowohl am Mokattam als am Birket el Qerun, eine Menge eigenthümlicher, zum Theile recht interessanter Typen, doch wird sie stratigraphisch unabänderlich fixirt durch die grosse Häufigkeit des Cardium obliquum und der Turritella fasciata var. tricarinata und durch die weitere Häufigkeit von Corbula gallica, C. revoluta, var. pixidicula, C. anatina, Mactra compressa, Cytherea Parisiensis, C. nitida?, Lucina pulchella, L. saxorum, Arca barbatula, A. condita, Pectunculus pulvinatus etc. etc.

Als Abschluss dieses egyptischen II, a betrachte ich die Thonbank, welche am inneren Mokattam, besonders aber im südwestlichen Wadi el Tih, Millionen kleinerer

Seeigel: Agassizia gibberula und Echinolampas Crameri, als reiches Echiniden-Kartoffel-Feld, enthält.

Wie im Pariser Becken, das bereits nicht tiefe Meer von II, a, mit II, b, durch Rückzug, einer theils brackischen, theils limnischen Bildung Platz macht, so haben wir nun, auch in Egypten, mit der entsprechenden, um die zwölf Meter mächtigen Abtheilung, Ablagerungen eines ganz seichten Meeres, selbst mit Anklängen an eine Landbildung (eine Melanopsis, Knochen von Archaeochaerus und Schilder von Land-Schildkröten) vor uns. Diese zweite Abtheilung beginnt mit einer dünneren Schicht voll Plicatula polymorpha und Turritella fasciata, var. tricarinata, aber nicht ohne viele weitere, schön verkieste kleinere Mollusken-Arten und verschiedene Corallen-Formen. Dann folgt die Haupt-Carolia-Bank, mit Ostrea Clot-Beyi, O. Reili und O. elegans, sowie mit Vulsella legumen, Alles in Menge und, besonders im Wadi el Tih, prächtig erhalten, darüber. Oben aber entwickeln sich einige Meter verschiedenfarbige Thone, worin zu oberst Lucina Volderi und die zwei erwähnten kleineren Seeigel wieder ziemlich häufig werden.

Ob nun diese oberste Thonlage, worauf am Nord-Mokattam die bekannte Moses-Quelle liegt, dem unwichtigen Parisian II, c, von Paris gleich kömmt, oder ob dasselbe sein Analogon in der halbmeter-dicken Gastropoden-Schicht über jener Quelle hat, ist schwer zu sagen. Dafür aber liegt es auf der Hand, dass die zwei obersten Abtheilungen des Mokattamer Parisian, wovon jede bloss zehn Meter mächtig sein dürfte, den caillasses (II, d und II, e) des Pariser Beckens entsprechen. Diese caillasses verdanken bekanntlich ihren Namen den Quarzconcretionen, welche die weichen Kalk- und Mergel-Bänke des obersten calcaire grossier durchsetzen. Es ist nun

wiederum interessant, dass die zwei obersten Abtheilungen (Schweinfurth's Schichten AAA α und AAA β) des Mokattamer Parisian ebenfalls quarzreicher sind als die unteren, ja, zu oberst, selbst in einen Mühlestein-Sandstein übergehen, und ebenso, dass die Abtheilung II, d hier ihrerseits noch petrefakten-reich bleibt, so oberhalb der Moses-Quelle und an der ganzen Südfront des Berges (wo im Osten eine dicke Operculina libyca-Schicht auftritt), während die Schlussschichten, II, e, ausser sparsam eingestreuten Nummulina Beaumonti, nichts Erkennbares enthalten. Beide Analogien in der That bilden den richtigen Schlussstein unseres Gebäudes, des Beweises der vollständigen Uebereinstimmung in der Gliederung des Pariser und des egyptischen Grobkalkes.

Wie ist nun aber diese merkwürdige Uebereinstimmung im Cementationsgange zweier so entfernten Becken zu erklären? Nun, es liegt für einmal auf der Hand, dass die alte Theorie der Hebung und Senkung des Meeresgrundes, auch in grösserer Entfernung von hohen Urgebirgs-Ketten, hier gänzlich Fiasco macht; denn solche gleichzeitige Hebungen und Senkungen, auf grosse Entfernungen. sind doch nicht denkbar, ohne dass die dazwischen liegenden Becken, wie, in unserem Falle, das nordsubalpine, regelmässig an der Bewegung theilgenommen hätten. Es bleibt also, auch in dieser Frage, siegreich die von mir zuerst als geologisches Gesetz der Stufen- und Unterstufen-Ausscheidung fixirte Theorie der regelmässigen Zu- und Abnahme der Meere, von den Polen gegen den Aequator, entsprechend den zwei halben Perihelien der Erde. So in der That erklären sich, einfach und vollkommen, bei der übereinstimmenden Gestalt beider verglichenen Parisian-Becken, als von Nord nach Süd langgestreckte Meerbusen, erstens die Zweitheilung

der Stufe, zweitens die offenbare Kleinheit und Seichtigkeit des Meeres der oberen Unterstufe, in beiden Ländern, im Verhältniss zum Meere der ersten Unterstufe, drittens die Regelmässigkeit der kleineren Meeresschwankungen in beiden Becken und endlich die gleichzeitige Zufuhr oder Entwicklung gewisser Faunen-Elemente und gewisser Gesteinsbestandtheile, wie des Glaukonits und des Kiesels.

* * *

Wenn auch geopragmatisch nicht von solcher Wichtigkeit wie das eben behandelte Thema, so dürfte der dritte Gegenstand meines Vortrages doch auch zu den interessantesten Stoffen der Tertiärgeologie gehören, denn er betrifft, wie schon gemeldet, die grosse Süsswasser-Formation Egyptens, mit ihren versteinerten Wäldern und ihren Geyser-Gebilden. Leider fehlt mir die Zeit, um ausführlich über meine Beobachtungen in Beziehung auf diese Formation zu berichten und muss ich diejenigen, welche sich um den Gegenstand interessiren, auf Professor Schweinfurth's neuesten Aufsatz über denselben, in der Zeitschrift der deutschen geolog. Gesellschaft, verweisen, indem ich hiebei erkläre, dass ich mit den Ausführungen und Schlüssen meines verehrten Collega's ganz einverstanden bin. Wie Sie wissen, meine Herren, bietet das Wunderland Egypten unter seinen Merkwürdigkeiten, im Osten wie im Westen von Cairo, auch verschiedene sog. versteinerte Wälder, das heisst grössere Strecken, welche mit verkieselten Baumstämmen, hauptsächlich einer Art, Nicolia egyptiaca, Unger, übersäet sind. Durch Auffinden von hohlen Kieselröhren mitten im grossen versteinerten Walde auf dem östlichen Mokattam und von verschiedenen, eigenthümlichen Kieselconcretionen, sowohl an der alten Strasse von Cairo nach Suez,

als an anderen Orten um Cairo, ist Schweinfurt zum auf der Hand liegenden Schluss gekommen, dass jene verkieselten Bäume durch das kieselhaltige, heisse Wasser von Geysern, welches vom Winde verweht wurde, zu Lebzeiten und so zu sagen stante pede, versteinert worden sind. Schweinfurth beweist ferner in seinem Aufsatze, dass der Quarzsandstein des Hügels Djebel el Ahmar, am Nordfusse des Mokattam, sowie sämmtliche nichtmarine Sandsteine und damit vorkommende bunte Tertiärthone Egyptens gleichen Alters wie jene versteinerten Wälder sammt ihren Geysern und Produkte der verschiedenen, verschieden hoch gelegenen Seen und Teiche der Epoche seien. Eines freilich konnte der hochverdiente Erforscher des Nillandes, in Ermangelung sicherer Anhaltspunkte, nicht feststellen, nämlich das genaue Alter dieser grossen Geyser-Formation. Allgemein wurde bis jetzt angenommen, dass sie »miocän«, indessen jedenfalls älter sei, als das Helvetian von Siuah und Suez; allein es steckt so furchtbar viel Verschiedenes unter diesem antiquirten Namen von Lyell, dass damit nicht viel gewonnen war. Ich habe nun das Glück gehabt, vor den Thoren von Cairo und zwar in der Sandgrube zwischen der schönen Moschee Kaïl-Beïl der sog. Chalifengräber und dem Eisenbahndamm, eine Kalksandstein-Bank mit vielen Süsswasser-Mollusken zu entdecken, deren Bestimmung endlich Licht über das Alter der grossen in Frage stehenden Süsswasserformation zu werfen kömmt. Unter den vielleicht zehn Arten Fluss-Muscheln und Schnecken, welche jene Bank mir in wenigen Tagen zahlreich lieferte, finden sich in der That, bestimmt und gerade am häufigsten, Melania Nysti, Duch., Melanopsis subulata, Sow., sowie wahrscheinlich Melanopsis hassiaca, Sandb. und Potamaclis turitissima, Forb. (Melania),

lauter Leitmuscheln des oberen Tongrian oder Boomin Nordeuropa's, merkwürdigerweise in Gesellschaft der ein nahes Meer anzeigenden Tellina mixta, Desh., von Etampes.*) Nachdem ich dann, kurz nach meiner Entdeckung, in der gleichen Gegend, nur auf der anderen Seite des Eisenbahndammes, also unmittelbar am Fusse des Mokattam, in etwas wie einen Geyser-Krater, mit mehreren daranstossenden Schichten grosser, halbkugeliger Concretionen und einer Parisian I, a-Wand, deren Oberfläche, sammt deren Versteinerungen, in braunem Gypse umgewandelt war, hinuntergerutscht, fielen mir erst die diesen Halbkugeln ähnlichen, nur noch polymorpheren Sandstein-Concretionen des obersten Tongrian des ligurischen Apennins und die gleich alten von Fontainebleau ein**), und ich freute mich nunmehr Grund zu haben, anzunehmen, dass jene bis jetzt von Niemandem gedeuteten, sonderbaren Sandstein-Figuren im Walde von Fontainebleau das Produkt von Geysern oder doch von heissen Kieselquellen im seichten Meere seien, sowie dass die Epoche der kleinen Meere des Tongrian-Alters sich nicht nur, ähnlich wie die Epoche des oberen Parisian, durch viele Landseen, sondern auch durch das Phänomen vieler Geyser ausgezeichnet haben möchte.***)

* * *

---

*) Auf die Entdeckung von Ablagerungen dieses Meeres, sowie von nicht fehlen könnenden des untertongrischen darf man nun gespannt sein.

**) Siehe meinen Aufsatz im Bulletin Soc. geol. Fr., 1877, p. 286, unten.

***) Es liegen merkwürdigerweise die in Rede stehenden drei Gebilde auf einer geraden Linie mit den isländischen Geysern. — Fernere obertongrische Landseen waren diejenigen von Aix, von Cassel, von Castellane, von Cordes, von Ormoy.

Ich schliesse meinen Bericht mit der kurzgefassten Darlegung der Elemente einer hochinteressanten, die Geologie Egypten's betreffenden Thatsache, gewissermassen als Bouquet meiner Mittheilung.

Wie jeder Gebildete heute weiss, ist die Sintfluth-Sage im Alterthum unter den asiatischen Völkern viel zu verbreitet gewesen, als dass sie nicht auf partiellen Thatsachen beruhen müsste. Es ist nun eine solche Thatsache, welche zugleich ein neues geologisches Licht auf die so controversirte Frage nach dem Zustande der Sahara während der grossen Gletscherzeit wirft, welche ich heute der Gelehrtenwelt, als Erster, vorzulegen die Ehre habe.

Sowohl am Westfusse des Mokattam, als in der Nähe der Pyramiden und gerade zwischen der Gruppe von Gizeh und der südlicheren, von Sakarah, liegen zum Theile oberflächlich und in der unmittelbaren Nähe von gleichzeitigen Bohrmuschel-Löchern (zumeist von Lithodomus lithophagus, dann von Cypricardia, aber nicht von Pholaden), eine Menge Austerschalen, recenter Arten, in einem gelblichen Kalksande oder Sandstein, der auf dem Grobkalke ruht. Es sind diese Species, am Mokattam, vornehmlich: Ostrea adriatica, O. cucullata, und Varietäten (Mittelmeer, Rothes Meer), O. lamellosa (Mittelmeer), O. (Al.) plicata (Mittelmeer) und O. Senegalensis (Mittelmeer, Senegal), dann Spondylus gaederopus (Mittelmeer), Terebratula Moïsae (neu?), Balanus miser (Mittelmeer), B. sulcatus (Mittelmeer) und B. tintinnabulum (Mittelmeer); bei den Pyramiden aber: Clypeaster pliocaenicus (Astian II), Ostrea cucullata, O. lamellosa, O. plicata, Pecten (Neithea) benedictus (Helvetian I — Rothes Meer), Pecten scabrellus (Helvetian I — Astian II),

Cassis saburon (Langhien I — Mittelmeer) und Strombus coronatus var. minor (Helvetian I — Astian II). Fraas hielt diese Ablagerungen für noch miocän, während Beyrich in seinem neueren Aufsatz, in der Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft, 1882, sie in's Pliocäne versetzt. Und in der That kann der Clypeaster = Sand und Sandstein, allein betrachtet, ebensogut für Helvetian als für Astian gehalten werden, während freilich die Faunula der Austern-Sandmergel am Mokattam eine durchaus recente Mittelmeer-Facies besitzt. So stund die Frage, als der Unterscheich des Pyramidendorfes Kafra, Abdalah, im Januar 1884 Schweinfurth, und letzten Januar mich in ein kleines Seitenthal, sechs Kilometer südlich von den grossen Pyramiden, führte, wo unter einer zwanzig bis dreissig Centimeter dicken Sandsteinbank eine feinsandige Ablagerung sich findet, welche stellenweise eine ungeheure Menge der prächtigst erhaltenen Meeres-Conchylien enthält. An dieser Fauna fällt sogleich auf, erstens die Kleinheit weitaus der meisten Arten und zweitens die relative Kleinheit der meisten Grösseren. Durch ihre Mischung (Strombus, Cassis, Terebra, Conus, Pleurotoma, Chenopus, Bulla etc.) erweist sie sich als den tieferen Stellen der zweiten batymetrischen Zone (bis 150 Meter Meerestiefe) angehörend. Ihre Facies aber ist durchaus eine recente, mediterrane, indem, von ihren hundert und einigen Arten, wenigstens fünfundneunzig noch, und stellenweise im gleichen Häufigkeitsgrade, im Mittelmeer vorkommen. Interessanterweise, indessen nothwendigermassen, zählt sie einige wenige, zum Theil häufige, mio-pliocäne oder neue Formen, nämlich: Arca Herodoti (neu), Cardium diluvianum (neu), Tellina bipartita (Aquitan. I — Helvet. I), Turritella punctulata (Helvet. I — Astian II),

Xenophora infundibulum (Helvet. II, b — Astian II), Pleurotoma bellatula (Helvet. I — II, b), Conus pyramidula (neu), Ficula Agassizi (Helvet. I — II) und Strombus coronatus (Helvet. I — Astian II), welche erst hier zum Aussterben kamen. Indessen ist ihre Faunenmischung so radikal verschieden von derjenigen beider pliocänen Faunen, namentlich durch das Fehlen der bezeichnenden Pleurotomen, Conus, Cancellarien, Buccina, Pecten, Pectunculus, Nuculen, Carditen etc., dass sie selbstverständlich viel jünger als diese sein muss. Ihre Ablagerung liegt circa dreizehn Meter tiefer als die nahe Clypeaster-Bank, enthält aber nichtsdestoweniger einige Arten daraus, so Pecten benedictus, P. scabrellus, var., Ostrea lamellosa und Terebratula Moïsae, und es liegt in den stratigraphischen Verhältnissen absolut auf der Hand, dass beide Schichten derselben Unterstufe angehören. Aus allen diesen Daten erhellt sonnenklar, dass das Nilthal in jüngster vorhistorischer Zeit, also vor circa 6000 Jahren, nothwendigerweise bis Assuan, wieder ein Mal unter Meer war. Es ist diess übrigens bereits von Dawson angenommen, da er auf einer geologischen Karte zu seinem recenten Werke über Egypten und Palästina, sowohl das Nil- als das Jordan-Thal zur Diluvial- (seiner Pluvial-) Zeit durch einen langen, schmalen Meeresarm eingenommen sein lässt. Allein dieselben Thatsachen schon und vornehmlich die Fauna des Wadi el Mellaha, sowie weitere neue Beobachtungen, welche ich zu machen Gelegenheit gehabt habe, führen mich weiter als Dawson und zwar zum Schlusse, dass das egyptische Diluvialmeer unmöglich auf das blosse Nilthal hat beschränkt sein können. Es sind nämlich in der That die Hügel auf der linken Nilseite zum Theil viel zu niedrig, als dass sie für unser

Meer ein unübersteigbarer Damm gewesen wären, da dieses, laut Facies genannter Fauna, allerwenigstens hundertundzwanzig Meter über dem jetzigen Mittelmeere reichen musste. Dann aber finden sich auf den kleinen Höhen, eine bis zwei Stunden westlich von den Pyramiden von Gizeh, eine Menge der ächtesten Meeresgerölle, oberflächlich und unter den Feuerstein-Splittern. Endlich habe ich auch einzelne solcher Gerölle oben auf der Oberfläche des Parisian I, a, circa 150 Meter über Meer, in der Bucht nordwestlich von Minieh gefunden und glaube ich bestimmt, solche, unverfängliche, auch auf dem hinteren Mokattam gesehen zu haben. Hiemit ist aber bewiesen, dass unser Diluvialmeer über die niedrigeren Theile des westlichen Plateau-Randes des untern Nilthales ging, und, da noch westlicher, erst in der Cyrenaica, im Tripolitanischen und im Atlas-Gebiete, Höhen sind, welche es begrenzen konnten, die ganze tiefere Sahara bedecken musste. Dass bis jetzt keine neueren Saharian-Ablagerungen aus diesem grossen Wüstengebiete bis zu den algierischen Schots bekannt sind, thut gewiss nichts zur Sache, ist ja dieser Theil der Erde geologisch so viel als unbekannt, und wird ja das Meer meistens viel zu seicht und unwirthlich für Meeresthiere gewesen sein. Einen weiteren Grund aber für die Annahme, dass unser egyptisches Saharian-Meer in der That hinter dem Atlas durch mit dem atlantischen Ozean verbunden war*), liefert die Fauna des Wadi el Mellaha, indem sie eine ganze Reihe jetzt ausschliesslich oder vorzüglich an der Küste Senegambiens lebender Arten zählt, nämlich: Ostrea Senegalensis, Lucina tigrina, Artemis africana, Venus plicata, Terebra Basteroti, T.

---

*) Und noch nicht durch die Meerenge von Gibraltar.

fuscata, T. pertusa, abgesehen von einigen andern, unsicher bestimmten Formen.

Es bleibt also, trotz Zittel's gelehrten Ausführungen, die Vermuthung Escher's von der Linth, dass die Sahara zur grossen Gletscherzeit zum Theile unter Meer war, richtig und die Thatsache bestehen, dass der Sirocco dazumal und in Folge dessen und des vielen Schnees und Eises auf seinem Wege, statt trocken und warm, feucht und frisch, wie etwa jetzt der Westwind gewesen sein dürfte.

Auch in dieser Beziehung, schliesslich, in Bezug auf die klimaterischen Verhältnisse Egyptens zur Diluvialzeit ist die Fauna des Wadi el Mellaha lehrreich zu nennen. Ich erwähnte bereits, dass sie, ganz auffallenderweise, aus meistens kleinen Arten in ungeheurer Menge, dann aber aus meistens kleinen Individuen sonst viel grösser werdender Arten, wie Pectunculus violacescens, Cytherea Chione, Venus plicata, Tellina planata bestehe. Dass diese Formen-Reduzirungen nicht vom Kalkmangel oder von der Unwirthlichkeit des Meeresgrundes, oder vom brackischen Wasser herrühre, liegt auf der Hand, denn eine passendere Stellung, in einer submarinen Kesselbucht auf Kalkgrund, könnte eine Mollusken-Gesellschaft nicht haben. Es bleibt also zur Erklärung der auffallenden Thatsache nur die Annahme übrig, dass das Meerwasser abnorm kalt war. Diess führt uns aber zur weiteren Annahme, dass zur grossen Gletscherzeit auch die höheren Berge Egyptens, wenigstens den grösseren Theil des Jahres hindurch, Eis-Kappen trugen, und dass der bei Assuan in's Meer einmündende Nil einen guten Theil des Jahres Eis trieb.

Beiträge zu graphischen Ausgleichungen

von

Carl Genge.

Die sogenannte »Badische Ausgleichungsmethode« ist schon in den ersten Decennien unseres Jahrhunderts von den Obersten Tulla (1770—1828) und Klose (1790—1860) in die Praxis eingeführt worden. Wegen der Uebersichtlichkeit und Anschaulichkeit, welche diese Methode gewährt, hat sie sich bei Triangulirungen, die nach einem Systeme von successiven Puncteinschaltungen ausgeglichen werden sollen, auch bis in die jüngste Zeit vielfach als praktisch bewährt.*) Dieselbe besteht im Wesentlichen darin, dass man die einzelnen Winkel- resp. Richtungsbeobachtungen, welche zur Bestimmung eines nämlichen Punctes gemacht worden sind, durch je einen linearen geometrischen Ort desselben zur graphischen Darstellung bringt. Infolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler sind aber diese geometrischen Oerter nicht widerspruchsfrei, sondern sie lassen an Stelle eines einzigen Strahlenbüschels in der Zeichnungsebene, eine sogenannte »fehlerzeigende Figur« entstehen, innerhalb welcher die wahre Lage des Punctes, in Ermangelung anderer Kriterien, vermuthet werden muss.

Die eigentliche Ausgleichung der fehlerzeigenden Figur, mit Rücksicht auf die Wahl des definitiven Punctes, erfolgt in der Praxis wohl nur selten nach einer strengen Methode, sondern derselbe wird meistens, nur mit unge-

---

*) Siehe Jordans „Handbuch der Vermessungskunde". 1877. I. Band. § 121.

führer Berücksichtigung der ungleichen Parallelverschiebungen der bestimmenden Elemente für je eine Secunde, nach dem »praktischen Gefühl« möglichst inmitten der fehlerzeigenden Figur willkürlich festgesetzt. Auch dürften allgemein gültige Methoden zur graphischen Auffindung des nach der Methode der kleinsten Quadrate wahrscheinlichsten Punctes, bei einer beliebigen Anzahl von bestimmenden Geraden, nur wenige schon in weiteren Kreisen bekannt geworden sein. So sehr nun jenes naturalistische Verfahren den praktischen Bedürfnissen einer Kleintriangulation auch entsprechend sein mag, so wenig befriedigt dasselbe anderseits das theoretisch-mathematische Bewusstsein, das selbst in kleineren Dingen jeder Willkür und Inconsequenz abgeneigt bleibt. Jeder denkende, wissenschaftlich vorgebildete Arbeiter sollte auch in diesem Falle den Trieb in sich fühlen, sich eine rationelle Methode anzueignen, deren Anwendung bei thunlichster Kürze und Einfachheit allen subjectiven Dispositionen einen Riegel vorzuschieben erlaubt.

Das Verfahren vom ehemaligen Marineoffizier Bertot ist zuerst in den »Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences«, t. LXXXII (20 Mars 1876) pag. 682 u. f. veröffentlicht, und durch Prof. Dr. Helmert in dem VI. Bd. der »Zeitschrift für Vermessungswesen«, 1877, pag. 53 u. f. auch der deutschen Leserwelt bekannt gegeben worden.*) Der Letztere hat in den einleitenden Worten zu seinem Referate am gleichen Orte noch auf ein anderes, von Bertot unabhängiges Verfahren hingewiesen, welches er schon in seiner früheren Arbeit »Studien über rationelle Vermessungen etc.« in

*) Vgl. auch Vogler's „Lehrbuch der prakt. Geom. 1885" I. Theil, § 164.

Schlömilchs Zeitschrift für Math. u. Ph. (13. Jahrg. 1868) in der Anm. zu § 18, pag. 91, angedeutet hatte. Ob jene Andeutung behufs ihrer praktischen Nutzbarmachung bisher von irgend einer Seite schon weiter verarbeitet worden, ist uns nicht bekannt. Ganz unabhängig von derselben sind die vorliegenden Methoden gefunden und entwickelt worden, wie sich bald aus dem weiteren Zusammenhange ergeben wird.

Von den drei Abschnitten dieser Arbeit bildet der erste die Grundlage der beiden folgenden, während diese letzteren selbst je eine besondere Methode der graphischen Ausgleichung enthalten.

I. Das elliptische Paraboloid.

(s. hiezu Taf. I).

Die Methode der kleinsten Quadrate stellt bei der Bestimmung der wahrscheinlichsten Lage eines Punctes, für welchen mehr als zwei, nicht durch denselben Punct gehende Bestimmungsgeraden derselben Ebene als sich widersprechende geometrische Oerter gegeben sind, die Bedingung auf, dass die Summe der Quadrate aller Abstände des gesuchten Punctes von jenen Geraden, gemessen durch die je einer Secunde entsprechende Parallelverschiebung derselben, ein Minimum sein müsse.

Denken wir uns für jeden beliebigen Punct derselben Ebene die Summe der Quadrate aller seiner Abstände in jenem Sinne gebildet und dann in irgend einem Massstabe als Senkrechte zu der Ebene in dem betreffenden Puncte selbst, je nach derselben Seite hin, aufgetragen, so liegen die oberen Endpuncte aller dieser Senkrechten in einer continuirlichen Fläche, deren Minimalstelle sich senkrecht über dem durch die Meth. d. kl. Q. ge-

forderten Puncte befindet. So lange die Natur dieser Fläche nicht näher bekannt ist, lässt sich die Minimalstelle — etwa durch Einzeichnen von Niveaucurven — nur näherungsweise ermitteln. Unsere nächste Aufgabe wird daher sein, die Entstehung der Fläche noch genauer zu verfolgen, um auf synthetischem Wege ihren allgemeinen Charakter zu erkennen, und zwar wollen wir eine stufenweise Bildung der Fläche dadurch eintreten lassen, dass wir successive die Abstände von den einzelnen bestimmenden Geraden in Betracht ziehen.

Zunächst also handle es sich nur um die eine Bestimmungsgerade a. Jeder in a selbst gelegene Punct wird gar nicht erhöht, weil sein Abstand Null beträgt; jeder Punct ausserhalb a dagegen erhält eine Flächenordinate gleich dem Quadrate seines Abstandes von a, gemessen durch die einer Secunde entsprechende Parallelverschiebung dieser Bestimmungsgeraden. Alle Puncte in einer Parallelen zu a haben infolge ihres gleich grossen Abstandes auch eine constante Flächenordinate, oder — eine Verticalebene, parallel zu a, schneidet die Fläche in einer horizontalen Geraden. Sämmtliche Puncte einer Geraden, welche a unter einem beliebigen Winkel in der Grundebene schneidet, haben auf je einer Seite von a ungleiche Flächenordinaten; dieselben nehmen zu bei wachsender Entfernung vom Schnittpuncte, aber nicht in demselben Verhältnisse. Während die letztere dem senkrechten Abstande der Fusspuncte von a einfach proportional bleibt, sind die Flächenordinaten dem Quadrate jenes Abstandes proportional. Hieraus erkennt man, dass eine Verticalebene, durch jene schiefe Gerade gelegt, die Fläche in einer Parabel schneidet, welche mit ihrem in a gelegenen Scheitel die Grundebene berührt. Jede Pa-

rallelebene zur letzteren Verticalebene schneidet die Fläche in einer der vorigen congruenten Parabel, so dass jetzt die ganze Fläche entstanden gedacht werden kann, entweder durch die Parallelverschiebung einer constanten Parabel, deren Achse zur Grundebene senkrecht ist, und deren Scheitel sich in a fortbewegt — oder auch durch das Hinab- und Hinaufgleiten einer horizontalen Geraden, parallel zu a, längs einer festen Parabel, deren Achse zur Grundebene senkrecht steht, und deren Scheitel in a liegt. Aus beiden Anschauungsweisen geht ohne weiteres hervor, dass die Fläche ein horizontaler parabolischer Cylinder ist, der die Grundebene längs seiner mit a zusammenfallenden Scheitellinie berührt. Jede Horizontalebene schneidet daher die Fläche in zwei parallelen Geraden, deren senkrechte Projectionen auf die Grundebene ebenfalls parallel zu a sind und in gleichem Abstande zu beiden Seiten der Bestimmungsgeraden sich befinden.

Bezeichnen wir diese zuerst erhaltene Fläche mit Π_a und die darüber befindliche zweite, welche sich aus der gleichzeitigen Berücksichtigung der Bestimmungsgeraden a und b ergeben wird, mit Π_{ab}, so erhebt sich Π_{ab} ganz in derselben Weise über Π_a, wie Π_a über die Grundebene aufgebaut war. Auch zwischen diesen beiden Flächen findet eine gegenseitige Berührung statt und zwar längs derjenigen Parabel, in welcher die durch b gehende Verticalebene B die Fläche Π_a schneidet. Zunächst erkennt man leicht, dass diese Parabel in beiden Flächen zugleich gelegen sein muss. Während nämlich im Allgemeinen die Flächenordinaten von Π_a zu denen von Π_{ab} um einen Betrag anwachsen, der dem Quadrate ihres senkrechten Abstandes von b direct proportional ist, erhalten die in B selbst gelegenen Flächenordinaten den Zuwachs Null.

Aber auch in einer Parallelebene, die von b einen unendlich kleinen Abstand hat, auf einer beliebigen Seite von B, beträgt jener Zuwachs nur das Quadrat einer unendlich kleinen Grösse, also eine unendlich kleine Grösse zweiten Grades, die im Verhältniss zu einer solchen des ersten Grades verschwindet. Da somit beide Flächen noch durch eine unendlich benachbarte Parallelebene von von B in einer nämlichen Parabel geschnitten werden, — die constructiv mit der vorigen zu identificiren ist — so müssen sich Π_a und Π_{ab} längs diesen beiden unendlich benachbarten Parabeln berühren.

Jede Verticalebene, in endlicher Entfernung parallel zu b, schneidet dagegen beide Flächen in zwei verschiedenen Parabeln, die untereinander und somit beide auch der Berührungsparabel in B congruent sind; denn die Flächenordinaten von Π_a und Π_{ab}, je in einer solchen Ebene, unterscheiden sich gemäss ihrem gleich grossen Abstande von b blos durch einen constanten endlichen Zuwachs, während anderseits der horizontale parabolische Cylinder Π_a von allen parallelen Verticalebenen, die seiner Scheitellinie nicht parallel sind, je in congruenten Parabeln geschnitten wird. So werden beim Uebergange von der ersten zur zweiten Fläche, in allen zu b parallelen Verticalebenen, die constanten Schnittparabeln, welche in Π_a die Grundebene in je einem Puncte von a berührten, für Π_{ab} über die Grundebene erhöht, wobei ihre Scheitelpuncte in der durch a gehenden Verticalebene A bleiben. Das Mass der Erhöhung nimmt aber zu mit der Entfernung von b und zwar wieder in dem ungleichen Verhältnisse, dass letztere dem senkrechten Abstande der Schnittebene von b einfach proportional ist, während die Erhöhung proportional dem Quadrate dieses Abstandes wächst. Ver-

folgt man dabei den Weg, welchen die Scheitel der constanten Schnittparabeln in Π_{ab} bei der Fortbewegung einer zu b parallelen Verticalebene bezeichnen, so ergiebt sich aus dem Obigen, dass derselbe mit derjenigen anderen Parabel identisch ist, in welcher der parabolische Cylinder Π_b von der Verticalebene A geschnitten wird und längs welcher Π_b und Π_{ab}, aus analogen Gründen wie oben, sich gegenseitig berühren müssen.

Die Fläche zweiter Stufe Π_{ab} — wie wir sie hier nennen wollen — kann daher entstanden gedacht werden aus den zwei Parabeln, welche die resp. durch a und b gehenden Verticalebenen A und B umgekehrt aus Π_b und Π_a herausschneiden, indem man die eine derselben als Erzeugende parallel zu sich selbst verschiebt, während ihr Scheitel die andere Parabel als Leitcurve durchläuft; da bei diesem Vorgange beide Parabeln ihre Convexseite der Grundebene zuwenden, so ist die entstehende Fläche Π_{ab} ein elliptisches Paraboloid, welches von den beiden parabolischen Cylindern Π_a und Π_b umhüllt wird. Alle drei Flächen haben im Endlichen nur noch einen Punct gemein, nämlich den Schnittpunct der beiden Berührungsparabeln in A und B, oder den im Schnittpuncte von a und b gelegenen Scheitelpunct von Π_{ab}, in welchem diese Fläche die Grundebene gerade noch berührt.

Die Verticalebenen A und B sind infolge der Entstehungsweise der Fläche ein Paar conjugirter Diametralebenen und ihre Schnittlinie die senkrechte Achse des Paraboloids.*) Da aber A und B in keiner Weise

*) Der Kürze wegen wollen wir im folgenden unter einer Diametralebene des Paraboloids immer eine solche verstehen, die nicht nur — wie hier jede Verticalebene — durch den unendlich fernen Mittelpunct geht, sondern auch die ganze Achse desselben enthält.

ausgezeichnete Diametralebenen sind, so bemerken wir für das weiter unten folgende, dass die Erzeugung derselben Fläche Π_{ab} an sich auch durch die analoge Bewegung zweier anderen Parabeln vor sich gehen könnte, die irgend ein beliebiges Paar von der Involution ihrer conjugirten Diametralebenen aus derselben herausschneidet. Diese Involution wird vollständig bestimmt durch ein zweites Paar verticaler Ebenen M und M^*, welches durch A und B harmonisch getrennt zugleich auch diejenigen Parabeln enthält, in denen die parabolischen Cylinder Π_a und Π_b sich gegenseitig durchdringen.

Die senkrechten Projectionen aller Horizontalschnitte von Π_{ab} auf die Grundebene sind ähnliche und ähnlich gelegene um den Schnittpunkt von a und b concentrische Ellipsen. Die Bestimmungsgeraden a und b sind dabei ein Paar aus der allen diesen Ellipsen gemeinschaftlichen Involution conjugirter Durchmesser und ein zweites Paar derselben bilden die Spuren m und m^* der zuletzt erwähnten Verticalebenen, als die beiden Diagonalen eines Parallelogramms, welches man durch die Projection eines gleichzeitigen horizontalen Schnittes der beiden parabolischen Cylinder Π_a und Π_b erhält, und dessen Seiten die zugehörige Ellipse in ihren resp. Schnittpuncten mit b und a tangiren müssen, da Π_{ab} von Π_a und Π_b nur in Puncten resp. von B und A berührt wird. —

Tritt zu den beiden ersten noch eine dritte Bestimmungsgerade c hinzu, so sei Γ die durch dieselbe gehende Verticalebene. Der Stellung von Γ entspricht eine ihr conjugirte Diametralebene Γ_1 in Bezug auf Π_{ab}, welche mit der Achse dieser Fläche auch den Schnittpunct von a und b enthält. Γ und Γ_1 schneiden das Paraboloid

Π_{ab} in je einer Parabel, wobei die in der Diametralebene Γ_1 liegende durch den Scheitel der andern in Γ geht. Π_{ab} hätte also auch aus diesen beiden Parabeln entstanden sein können, wenn man die in Γ_1 befindliche als Leitcurve und diejenige in Γ als erzeugende Parabel auffasst. Diese letztere gehört aber nicht nur der Fläche Π_{ab} an, sondern gleichzeitig, da sie in der durch c gehenden Verticalebene gelegen ist, auch der Fläche dritter Stufe Π_{abc}, welche sich aus den drei Bestimmungsgeraden a, b und c ergiebt. Dabei findet aus ganz analogen Gründen wie oben (s. pag. 273) zwischen Π_{ab} und Π_{abc} längs dieser gemeinschaftlichen Parabel eine gegenseitige Berührung statt, so dass wir dieselbe hier kurz wieder eine Berührungsparabel nennen können. Weiterhin ergiebt sich, dass diese Berührungsparabel in Γ nicht nur für Π_{ab}, sondern ebensosehr für die Entstehung von Π_{abc} als eine Erzeugende angesehen werden darf; denn bei den Parallelverschiebungen von Γ ändert sic, ebenfalls aus analogen Gründen wie oben (vgl. pag. 273), weder für die eine noch für die andere Fläche ihre constante Form, sondern nur ihre jeweilige Höhenlage, wobei sie jedoch mit ihrem Scheitel einer anderen Leitcurve für Π_{abc} folgt, die ebenfalls in Γ_1 liegt, da jener (beim Uebergange von Π_{ab} zu Π_{abc}) aus dieser Ebene nicht heraustreten kann, sondern nur innerhalb derselben senkrecht gehoben wird. Diese Leitcurve wird gebildet durch die oberen Endpuncte der in Γ_1 befindlichen Flächenordinaten von Π_{abc}, welche sich durch einfache Addition zusammensetzen aus den zugehörigen Flächenordinaten einestheils des Paraboloids Π_{ab} und anderentheils des parabolischen Cylinders Π_c. Bezeichnen wir die beiden Parabeln, in welchen Π_{ab} und Π_c von Γ_1 geschnitten werden, resp. mit P_{ab} und P_c,

wobei P_{ab} hier die Leitcurve für Π_{ab} war, so sei P_{abc} die in dem obigen Sinne resultirende Leitcurve für Π_{abc}, die infolge ihrer Entstehungsweise wieder eine Parabel [in Γ_1] ist. *) Da also ganz analog wie Π_{ab} auch die Fläche dritter Stufe Π_{abc} durch zwei Parabeln erzeugt wird — durch P_{abc} und durch die Berührungsparabel — so erkennen wir sie ebenfalls als ein zur Grundebene senkrechtes elliptisches Paraboloid. Dasselbe wird berührt von den umhüllenden Flächen zweiter Stufe Π_{ab}, Π_{ac} und Π_{bc} längs je einer Parabel, senkrecht resp. über c, b und a, sowie von den Flächen erster Stufe Π_a, Π_b und Π_c in je einem endlichen Puncte — dem Schnittpuncte von je zwei jener Parabeln — senkrecht über dem resp. Schnittpuncte von b und c, a und c, a und b, den wir bezeichnen können resp. mit S_{bc}, S_{ac} und S_{ab}. **)

Seien A_1, B_1 und Γ_1 die den Stellungen von A, B und Γ conjugirten Diametralebenen resp. in Bezug auf Π_{bc}, Π_{ac} und Π_{ab}, so haben wir schon oben bemerken

*) Zur Kennzeichnung der gegenseitigen Lage dieser drei Parabeln bemerken wir, dass die Projectionen ihrer resp. Scheitel S_{ab}, S_c und S'_{abc} auf der durch den Schnittpunct von a und b gehenden Spur c_1 der Diametralebene Γ_1 in der Weise vertheilt sind, dass S_{ab} im Schnittpuncte von a und b, S_c dagegen (gleichzeitig mit der Projection des Scheitels der Berührungsparabel) im Schnittpuncte von c und c_1 gelegen sind, während die Strecke zwischen jenen beiden Schnittpuncten durch die Projection von S_{abc} im directen Verhältnisse der Parameter p und q resp. von P_{ab} und P_c getheilt wird. Der Parameter von P_{abc} ist dann $\frac{p\,q}{p+q}$. Im Scheitel der Berührungsparabel, senkrecht über S_c, findet zwischen den beiden Leitcurven P_{ab} und P_{abc} eine gegenseitige Berührung statt; desgleichen berühren sich hier auch noch P_{abc} und P_c, senkrecht über S_{ab}, da der Scheitel von Π_{ab} ebenfalls in der Grundebene selbst gelegen ist. (s. Fig. 1. Taf. I.)

**) Die Grundebene wird von Π_{abc} nicht mehr berührt, da für keinen ihrer Puncte die Abstände von a, b und c gleichzeitig Null sind.

können, dass Π_{abc} und Π_{ab} zur Stellung von Γ die gemeinschaftliche conjugirte Diametralebene Γ_1 hatten; denn diese beiden Flächen liessen sich entstanden denken durch eine nämliche Parabel in Γ, als Erzeugende, und durch je eine Parabel in der nämlichen Ebene Γ_1, als Leitcurve. Dem analog hat Π_{abc} auch je mit Π_{ac} und Π_{bc} resp. zur Stellung von B und A die gemeinschaftliche conjugirte Diametralebene B_1 und A_1. Es müssen daher A_1, B_1 und Γ_1 nicht nur die Achse resp. von Π_{bc}, Π_{ac} Π_{ab} enthalten, sondern auch alle drei zusammen durch die Achse von Π_{abc} gehen. Die hieraus resultirenden Beziehungen zwischen den Involutionen conjugirter Diametralebenen in Bezug auf die vier Flächen werden durch Projection auf die ebenen Gebilde in der Grundebene übertragen und sollen dort noch mehr hervorgehoben werden.

Der Scheitel des Paraboloids Π_{abc} wird durch die Achse in S'_{abc} auf die Grundebene projicirt, in welchem Puncte somit auch die Spuren a_1, b_1 und c_1 jener drei Diametralebenen sich schneiden müssen. Die Projectionen aller Horizontalschnitte von Π_{abc} sind wieder ähnliche und ähnlich gelegene um S'_{abc} concentrische Ellipsen mit einer gemeinschaftlichen Involution conjugirter Durchmesser, von denen wir die drei Paare kennen:

a_1 und die Richtung von a,
b_1 und die Richtung von b,
c_1 und die Richtung von c.

Da von diesen Paaren je eines gleichzeitig auch der Involution conjugirter Durchmesser in Bezug auf den Scheitel resp. S_{bc}, S_{ac} und S_{ab} insofern angehört, als der Strahl resp. a_1, b_1 und c_1 in beiden je identisch ist, die conjugirten dagegen in beiden je parallel laufen, so können wir hier-

aus folgende für die spätere Construction wichtige Consequenzen ziehen:

*Durch das Hinzutreten einer neuen Bestimmungsgeraden wird der Scheitel des Paraboloids nächst niederer Stufe (resp. seine Projection in der Grundebene) aus seiner Lage abgelenkt nach der Seite jener neuen Bestimmungsgeraden hin. Die Richtung der letzteren bestimmt die Richtung der Ablenkung, indem diese beiden Richtungen zusammen, in der soeben angedeuteten Weise, ein Paar conjugirter Strahlen bilden aus der Involution conjugirter Durchmesser sowohl in Bezug auf den früheren als auch in Bezug auf den neuen Scheitel.**) *Vertauscht man von den Bestimmungsgeraden die neu hinzugetretene successive mit je einer der früheren, so lassen sich zur Bestimmung des neuen Scheitels im Ganzen ebenso viele geometrische Oerter desselben ableiten, als Bestimmungsgeraden vorhanden sind.*

Da die bisherigen Resultate, zunächst abgeleitet in Bezug auf die Fläche dritter Stufe Π_{abc}, bereits auch allgemeiner Natur sind, so können wir, um Wiederholungen zu vermeiden, unsere Untersuchungen über den weiteren successiven Aufbau einer Fläche höherer Stufe hier abbrechen.**) *Auch bei n gegebenen Bestimmungsgeraden ist die resultirende Fläche $n$ter Stufe ein über der Grund-*

---

*) Die Intensität der Ablenkung ist eine Function von dem Gewichte sämmtlicher Bestimmungsgeraden. Vgl. hierüber die [erste] Anmerkung auf pag. 277.

**) Durch den nämlichen Gedankengang, den wir auf pag. 275 bis 278 benützt haben, um Π_{abc} aus Π_{ab} und aus Π_c nebst den weiteren Consequenzen abzuleiten, lässt sich auch allgemein nachweisen, dass die obigen Resultate noch für eine Fläche $(n+1)$ster Stufe gelten müssen, wofern sie für eine der $n+1$ Flächen $n$ter Stufe zu Recht bestehen.

ebene frei schwebendes senkrechtes elliptisches Paraboloid, welches von n Flächen (n—1)ter Stufe längs je einer Parabel, und von $\frac{n(n-1)}{2}$ *Flächen (n—2)ter Stufe noch in je einem Puncte im Endlichen berührt wird, entsprechend der Lage und den* $\frac{n(n-1)}{2}$ *gegenseitigen Schnittpuncten der n Bestimmungsgeraden.*

Von wesentlicher Bedeutung für die Vereinfachung der Construction im dritten Abschnitte sind aber noch die folgenden Beobachtungen betreffend die oben erwähnten Berührungen zwischen benachbarten Flächen.

Zwei Paraboloide von benachbarter Stufe — wie Π_{ab} und Π_{abc} — berühren sich nicht nur gegenseitig längs einer Parabel, welche in der Verticalebene der nicht gemeinschaftlichen Bestimmungsgeraden gelegen ist, sondern sie werden längs derselben auch durch einen schiefen parabolischen Cylinder gleichzeitig berührt. Hatte man nämlich die beiden Paraboloide durch Parallelverschiebungen ihrer Berührungsparabel längs der resp. Leitcurve in der conjugirten Diametralebene entstehen lassen können, wobei sich die letzteren im Scheitel der ersteren gegenseitig berühren mussten (s. pag. 277), so ergiebt sich dieser Cylinder durch die Parallelverschiebung der nämlichen Berührungsparabel längs der jenen beiden Leitcurven gemeinschaftlichen Tangente, die somit als eine seiner Erzeugenden zu betrachten ist.

Jede quer durch die drei Flächen gelegte Horizontalebene schneidet die beiden Paraboloide in zwei Ellipsen und den schiefen parabolischen Cylinder in einer Parabel, wobei alle drei Kegelschnitte in den nämlichen Puncten (der Berührungsparabel) sich doppelt berühren. Die Schnittlinie der Horizontalebene mit der die Berührungs-

parabel enthaltenden Verticalebene ist die gemeinschaftliche Berührungssehne, und wenn man dieselbe als Polare auffasst, so liegt der zugehörige gemeinschaftliche Pol in Bezug auf jene drei Kegelschnitte im Schnittpuncte ihrer gemeinschaftlichen Tangenten. Im Horizontalschnitte der den drei Flächen gemeinschaftlichen Diametralebene, welche in Bezug auf dieselben der Stellung der obigen Verticalebene conjugirt war (vgl. pag. 278), haben die drei Kegelschnitte einen gemeinschaftlichen Durchmesser, als conjugirt zu der Richtung der Berührungssehne. Derselbe enthält daher neben den Mittelpuncten der beiden Ellipsen auch den Pol der Berührungssehne, *) und schneidet die Parabel im Endlichen in einem Puncte der oben erwähnten Erzeugenden des schiefen parabolischen Cylinders, in der Mitte zwischen Pol und Polare. Da letzteres von der Höhenlage der horizontalen Schnittebene ganz unabhängig ist, so erkennt man hieraus, dass der Weg, welchen der gemeinschaftliche Pol bei einer Parallelverschiebung derselben, in der Diametralebene beschreibt, eine Gerade ist, die im Vergleiche zu jener Erzeugenden immer den doppelten horizontalen Abstand von der Verticalebene beibehält und somit auch durch den Scheitel der Berührungsparabel hindurch gehen muss. **)

---

*) Vgl. den allgemeineren Satz auf pag. 297. (s. Fig. 2. Taf I.)

**) Hat man die horizontale Schnittebene so tief gesenkt, dass die Polare ausserhalb der Kegelschnitte fällt, so liegt der gemeinschaftliche Pol im Innern derselben, und zwar auch dann noch, wenn eine von den beiden Ellipsen — im Scheitel des zugehörigen Paraboloids — zu einem Puncte zusammenschrumpft, woraus weiterhin folgt, dass jene Pollinie auch durch die Scheitel der beiden Paraboloide gehen muss. Nicht nur in ihrer Projection auf die Grundebene (vgl. Anm. pag. 277), sondern auch im Raume liegen also diese beiden Scheitel mit dem Scheitel der Berührungsparabel in einer geraden Linie, was ebenfalls constructiv verwerthet werden könnte (s. den Aufriss zu Fig. 1. Taf. I.)

Während die Berührungsstellen der sich doppelt berührenden Kegelschnitte, sowie deren gemeinschaftliche Tangenten, entweder reell und verschieden, oder reell und zusammenfallend (im Scheitel der Berührungsparabel, bei osculirenden Kegelschnitten), oder endlich beide conjugirt imaginär sein können, so ist hier der Umstand von Belang, dass die Berührungssehne und der Schnittpunct der gemeinschaftlichen Tangenten bei jeder beliebigen Lage der horizontalen Schnittebene reell bleiben müssen, — jene als Schnittlinie zweier reellen Ebenen, dieser als Schnittpunct einer reellen Geraden mit einer reellen Ebene. Selbst dann, wenn eine der beiden Ellipsen oder beide zugleich, als imaginär gedacht werden sollten mit reellen Mittelpuncten — den Durchstosspuncten der beiden Paraboloidachsen gegen die horizontale Schnittebene, — so behalten doch die Berührungssehne und der zugehörige Pol ihre constructive Bedeutung zur Auffindung eines der Mittelpuncte und zwar jene als Trägerin einer der beiden Ellipsen gemeinschaftlichen Involution harmonischer Pole, dieser als der Scheitel der zugehörigen gemeinschaftlichen Involution harmonischer Polaren. —

In den folgenden Abschnitten haben wir nun noch die Wege näher zu bezeichnen, auf denen man zu dem Scheitel des letzten Paraboloids, als der Minimalstelle der Fläche oberster Stufe, resp. zu seiner Projection auf die Grundebene, mit möglichst geringem Aufwande an Zeit und Mühe gelangen kann.

II. Die numerisch-graphische Ausgleichung.

Nach den Ausführungen des vorigen Abschnittes bieten sich uns zwei Wege dar, um das gesuchte Ziel zu er-

reichen, von denen der eine in diesem zweiten Abschnitte behandelt werden soll. Da nämlich die zu Anfang aufgestellte Fläche sich als eine specielle Fläche zweiten Grades in spezieller Lage erwiesen hat, so werden wir zur directen Ermittelung ihrer Minimalstelle mit entsprechendem Erfolge auch zu den Hülfsmitteln der darstellenden Geometrie greifen dürfen.

Eine Fläche zweiten Grades ist im allgemeinen durch 9 Puncte bestimmt. In diesem Falle kennen wir schon zum voraus einen derselben sammt der zugehörigen Tangentialebene — ihren unendlich fernen Punct, durch die Richtung der zur Grundebene senkrechten Achse, und die unendlich ferne Berührungsebene, — welches zusammen dreien ihrer Puncte äquivalent ist, so dass zur vollständigen Bestimmung unseres elliptischen Paraboloids nur noch 6 unabhängige Puncte erforderlich sind. Dieselben ergeben sich direct aus den zugehörigen Flächenordinaten, wenn man für 6 beliebige Puncte in der Grundebene die Summe der Quadrate ihrer Abstände von sämmtlichen Bestimmungsgeraden in dem früher angedeuteten Sinne bildet. Die Menge der wirklich auszuführenden Messungen von jenen Abständen an einem eigens hierzu angefertigten Diagramm kann aber, wie wir weiter unten sehen werden, durch eine zweckmässige Auswahl der Puncte noch wesentlich vermindert werden.

Denkt man sich zunächst für drei beliebige in der nämlichen Geraden der Grundebene gelegene Puncte die Flächenordinaten gebildet und aufgetragen, so bestimmen deren obere Endpuncte vollständig diejenige Parabel, in welcher die durch jene Gerade gehende Verticalebene das Paraboloid schneidet; denn wir kennen bereits den unendlich fernen Punct dieser Parabel durch die Richtung

ihrer Achse, sowie auch dessen Tangente — die unendlich ferne Gerade der Schnittebene. Durch eine beliebige zweite, der ersten Verticalebene parallele Schnittebene wird das Paraboloid in einer neuen und zwar der ersteren congruenten Parabel geschnitten. Zur Bestimmung der letzteren braucht man daher nur für zwei ihrer Puncte die Flächenordinaten direct zu bilden. Denn zieht man die Sehne dieser beiden Puncte, so lässt sich bei der ersten Parabel durch den einen ihrer drei im Endlichen bekannten Puncte auch eine Parallele zu jener Sehne ziehen, deren zweiter Schnittpunct mit der Parabel linear construirbar ist; sucht man weiter die Achse der ersten Parabel, so bestimmt ihr Abstand von der Mitte jener Parallelsehne auch die Lage der Achse in der anderen congruenten Parabel. Durch die Construction der Scheitel in diesen Parabelachsen erhält man dann zugleich zwei Puncte für diejenige dritte Parabel, welche die der Stellung der beiden parallelen Schnittebenen conjugirte Diametralebene aus dem Paraboloid herausschneidet. Zur eindeutigen Bestimmung dieses Diametralschnittes genügt es daher, nur noch für einen seiner Puncte — den 6ten des ganzen Paraboloids — die Flächenordinate direct zu ermitteln. Die Diametralebene selbst geht dabei nicht nur durch jene beiden Parabelachsen, deren Spurpuncte ihre eigene Spurlinie bestimmen, sondern sie enthält zugleich die Achse des Paraboloids, die mit der Achse des Diametralschnittes identisch ist. Bei der Construction dieser letzteren findet man endlich durch deren Spurpunct die Projection des Scheitels sowohl des Diametralschnittes als auch der gesammten Fläche, d. h. also den gesuchten Punct des ganzen Problems.

Nachdem wir mit dem Obigen die Durchführbarkeit

der Construction in dem Falle nachgewiesen haben, dass für jene 6 Puncte die Flächenordinaten zur Verfügung stehen, wollen wir nun bei der praktischen Ausführung eine hiervon etwas abweichende mehr symmetrisch angelegte Anordnung befolgen, die mit Hinsicht auf die immerhin langwierigen directen Messungen der Abstände noch eine weitere Einschränkung derselben gestattet, und dabei auch die bei der Construction sich einschleichenden Fehlerfortpflanzungen noch besser zu vermeiden sucht.

Zu dem Zwecke nehmen wir ein senkrechtes Prisma von rechteckigem Querschnitte zu Hülfe, dessen Grundfläche denjenigen Theil der fehlerzeigenden Figur in der Grundebene möglichst bedeckt, in welchem die Lage des wahrscheinlichsten Punctes vermuthet werden darf. Es empfiehlt sich dabei, eine der vier Grundkanten in eine der Bestimmungsgeraden fallen zu lassen, sowie zwei Eckpuncte der Grundfläche womöglich in den Schnittpuncten von je zwei solchen anzunehmen. Um die gegenseitige Durchdringung dieses Prismas und des Paraboloids zu construiren, werden wir für die vier Seitenkanten die Durchstosspuncte durch directe Abstandsmessungen ihrer Fusspuncte aufsuchen, während für die Mittellinie in jeder der vier Seitenflächen der Durchstosspunct sich bequemer durch eine indirecte Ableitung ergeben wird. In Bezug auf jede einzelne Bestimmungsgerade in der Grundebene ist nämlich der senkrechte Abstand des Fusspunctes der Mittellinie genau das arithmetische Mittel der entsprechenden Fusspunctsabstände der beiden benachbarten Seitenkanten.

Seien z_1, z_3, z_5, z_7 die Längen der Seitenkanten, und z_2, z_4, z_6, z_8 die Längen der Mittellinien bis zu ihrem resp. Durchstosspuncte, und bezeichnet man mit δ_1, δ_3,

δ_5, δ_7, sowie mit δ_2, δ_4, δ_6, δ_8 die zugehörigen Abstände ihrer Fusspuncte von einer einzelnen der n Bestimmungsgeraden, immer gemessen durch die je einer Secunde entsprechende Parallelverschiebung derselben, so hat man allgemein

$$z_i = \sum_1^n \delta_i^2.$$

Um also die z_i zu finden, misst man zunächst die Abstände δ_1, δ_3, δ_5, δ_7 in Bezug auf jede einzelne der n Bestimmungsgeraden, wobei die Genauigkeit dieser Messungen controlirt werden kann durch die Proben

$$\delta_1 + \delta_5 = \delta_3 + \delta_7.$$

Am zweckmässigsten bedient man sich hierzu eines Diagramms (s. Fig. 2, Taf. II.), welches für jede Bestimmungsgerade einen besonderen Massstab aufweist. Sind die Bestimmungsgeraden durch gleich genaue Richtungs- oder Winkelmessungen erhalten worden, so dass sie in diesem Sinne alle ein gleiches Gewicht haben, so sind die je einer Secunde entsprechenden Parallelverschiebungen der Vorwärtsvisuren einfach proportional der Länge der Visirstrahlen, — diejenigen der Kreistangenten dagegen direct proportional der Länge der einschliessenden Seiten des auf der Station selbst gemessenen Winkels und umgekehrt proportional der Länge der diesem Winkel gegenüberliegenden Seite. *) In diesem Falle lässt sich das Diagramm am leichtesten herstellen mit Hülfe einer Situationsfigur (s. Fig. 1, Taf. II.), welche die gegenseitigen Entfernungen sämmtlicher Bestimmungspuncte und des zu bestimmenden Punctes mit

*) Vgl. Jordans „Handbuch der Vermessungskunde 1877", I. Band, § 40; sowie Voglers „Lehrbuch der praktischen Geometrie 1885", I. Theil, § 163.

hinreichender Genauigkeit enthält. Die aus derselben hervorgehenden Längen können für die Vorwärtsvisuren unmittelbar, und für die Kreistangenten nach einer einfachen graphischen Transformation in der Situationsfigur selbst, als Einheiten der Parallelverschiebungen — welche eine beliebige aber für alle Bestimmungsgeraden gleich grosse Anzahl Secunden repräsentiren — in das Diagramm eingetragen werden. Haben dagegen die Bestimmungselemente ein ungleiches Gewicht, so sind jene Einheiten vor ihrer Uebertragung in das Diagramm noch durch die entsprechenden Gewichtszahlen zu dividiren.

Nachdem man die obigen Messungsresultate für die δ_1, δ_3, δ_5 und δ_7 tabellarisch in vier Verticalcolumnen eingetragen hat, die durch je drei frei gelassene Columnen von einander getrennt sind, so bildet man und trägt je in die mittlere der letzteren ferner ein die resp. arithmetischen Mittel:

$$\delta_2 = \frac{\delta_1 + \delta_3}{2} \quad \delta_4 = \frac{\delta_3 + \delta_5}{2} \quad \delta_6 = \frac{\delta_5 + \delta_7}{2} \quad \delta_8 = \frac{\delta_7 + \delta_1}{2}$$

Dann berechnet man oder entnimmt einem mechanischen Hülfsmittel die Quadratzahlen sämmtlicher gefundenen Abstände δ_i, für welche die letzten noch frei gebliebenen Verticalcolumnen reservirt waren. Die Summen dieser Verticalreihen δ_i^2 liefern endlich die gewünschten z_i, die nun in einem beliebigen Massstabe in der Zeichnungsebene der fehlerzeigenden Figur (s. Fig. 3, Taf. II) verwendet werden können.

	$\underline{\delta_1}$	δ_1^2	δ_2	δ_2^2	$\underline{\delta_3}$	δ_3^2	δ_4	δ_4^2	$\underline{\delta_5}$	δ_5^2	δ_6	δ_6^2	$\underline{\delta_7}$	δ_7^2	δ_8	δ_8^2
a	0	0	+ 5.0	25	+10.0	100	+13.3	175	+16.5	272	+11.5	132	+ 6.5	42	+ 3.3	11
b	+ 7.6	58	÷ 7.3	53	+ 7.0	49	+ 2.1	4	— 2.7	7	— 2.4	6	— 2.0	4	+ 2.8	8
c	0	0	— 6.2	38	—12.3	151	—12.3	151	—12.3	151	— 6.2	38	0	0	0	0
d	+15.4	237	+11.9	141	+ 8.3	69	+ 4.2	18	0	0	+ 3.5	12	+ 7.1	50	+11.3	127
e	—17.9	320	— 6.6	44	+ 4.7	22	+ 2.4	6	0	0	—11.3	127	—22.6	509	—20.2	408
Σ	$z_1 = 615$		$z_2 = 301$		$z_3 = 391$		$z_4 = 354$		$z_5 = 430$		$z_6 = 315$		$z_7 = 605$		$z_8 = 554$	

Je zwei gegenüberliegende Seitenflächen des Prismas schneiden das Paraboloid in zwei congruenten Parabeln; für jede derselben haben wir jetzt je drei Puncte, aus denen wir die jeweilige Achse unabhängig von einander construiren können. Je zwei gegenüberliegende Achsen bestimmen dann eine der Stellung ihrer Parallelebenen conjugirte Diametralebene des Paraboloids, und mit der Schnittlinie dieser beiden Diametralebenen werden wir auch die Achse desselben gefunden haben.

Denken wir uns die vier Seitenflächen des Prismas um ihre resp. Grundkante als Rotationsachse in die Grundebene umgelegt (s. Fig. 3, Taf. II.), so können wir die z_i auf die zugehörigen Seitenkanten und Mittellinien von der Grundkante aus abtragen, wodurch wir die Parabelpuncte P_i erhalten. So sei die eine Parabel bestimmt durch die Puncte P_1 P_2 P_3. Ihre Achse finden wir durch folgende einfache Construction: Eine Parallele zur Grundkante durch P_2 schneidet die Seitenkanten von P_1 und P_3 senkrecht resp. in N_1 und N_3 und die durch diese Puncte gehenden Parallelen resp. zu P_2P_3 und P_2P_1 schneiden sich gegenseitig in einem Puncte O_2 von P_1P_3, sowie resp. P_1P_2 und P_3P_2 in O_3 und O_1. Sei N_2 der Schnittpunct von P_1P_3 mit der durch P_2 gehenden Verticalen — hier die Mittellinie, — so geht die Parabelachse durch den Punct M in der Mitte zwischen O_2 und N_2 (oder auch durch den Schnittpunct der beiden Diagonalen im Parallelogramm $P_2\,O_1\,O_2\,O_3$) senkrecht zur Grundkante; ihr Fusspunct in der letzteren ist zugleich ihre Spur in der Grundebene.

Zum Nachweise für die Berechtigung dieser Construction bemerken wir, dass auf der durch P_2 gezogenen Parallelen noch ein zweiter Parabelpunct P_2^* senkrecht

unter O_2 liegen muss, wobei die Mitte der zur Achse senkrechten Sehne $P_2P_2^*$ auch ein Punct der Achse wäre. Für die Bestimmung des Punctes P_2^* haben aber die Parallelen N_1O_2 und N_3O_2 je die Bedeutung einer Pascallinie in Bezug auf die Sechsecke resp.

$$P_2^* P_2 P_3 P_1 \overset{\infty}{S S^*} \quad \text{und} \quad P_2^* P_2 P_1 P_3 \overset{\infty}{S S^*},$$

wobei wir mit $\overset{\infty}{SS^*}$ den unendlich fernen Punct der Parabel sammt seiner Tangente bezeichnen wollen.

Ganz analog wie bei der ersten Parabel construiren wir die Achsen auch für die Parabeln der Puncte $P_3P_4P_5$, $P_5P_6P_7$ und $P_7P_8P_1$. Die Construction fällt am günstigsten aus, wenn das Prisma so gestellt war, dass die Durchstosspuncte der Mittellinien möglichst nahe an den Scheiteln der Schnittparabeln zu liegen kommen. In jeder Grundkante erhalten wir somit den Spurpunct der zugehörigen Parabelachse. Die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Spurpuncte in den Gegenseiten der Grundfläche sind dann die Spurlinien der zugehörigen conjugirten Diametralebenen, und da jede derselben die Achse des Paraboloids enthält, so bezeichnet der Schnittpunct der beiden Spurlinien den Spurpunct dieser Achse, also auch die Projection des Scheitels des Paraboloids auf die Grundebene oder den gesuchten wahrscheinlichsten Punct in der fehlerzeigenden Figur. —

Ueberblicken wir noch einmal die Summe der Arbeit, welche nach dieser numerisch-graphischen Ausgleichungsmethode bei n gegebenen Bestimmungsgeraden zu verwenden ist, so haben wir anzufertigen:

1) Eine Situationsfigur in beliebig kleinem Massstabe, — wenn eine solche nicht bereits vorliegen sollte behufs Herstellung der fehlerzeigenden Figur.

2) Ein Diagramm, entsprechend ungefähr der mittleren Grösse der fehlerzeigenden Figur, an dessen n Massstäben die Fusspunctsabstände jeder Flächenordinate von den n Bestimmungsgeraden, durch Abgreifen mit dem Zirkel, unmittelbar gemessen werden können.

3) Eine Rechnungstabelle, in welche successive einzutragen sind die Resultate von $4n$ Abstandsmessungen, die $4n$ arithmetischen Mittel derselben, deren $8n$ Quadratzahlen und endlich die 8 Quadratsummen, welche die Längen der 4 Seitenkanten und 4 Mittellinien eines angenommenen Hülfsprismas liefern.

4) Die Darstellung der Durchstosspuncte jener 4 Seitenkanten und 4 Mittellinien in der fehlerzeigenden Figur, sowie die 4malige Construction einer Achse bezüglich der Parabeln, welche durch je drei in derselben Verticalebene liegende Durchstosspuncte bestimmt werden. Den Schluss bilden die zwei Spurgeraden, deren Schnittpunct die Lösung des ganzen Problems enthält.

Die Arbeit ist demnach bei 1) und bei 2) angenähert direct proportional der Anzahl der Bestimmungsgeraden, dagegen bei 4) direct proportional der Anzahl der Seitenflächen des senkrechten Hülfsprismas, und endlich bei 3) direct proportional dem Producte aus jenen beiden Anzahlen.

Wollte man statt eines Hülfsprismas von rechteckigem Querschnitte ein solches annehmen, dessen Grundfläche etwa ein regelmässiges Sechseck ist, so würde am Princip der obigen Ausgleichungsmethode — auch in Bezug auf die symmetrische Anordnung derselben — nichts geändert. Die Anzahl der erforderlichen Hülfsgeraden bei der letzten Ausgleichungsarbeit in der fehlerzeigenden Figur würde in diesem Falle von 36 auf 54 steigen; da-

für erhielte man aber den gesuchten Punct des Problems nicht bloss durch den Schnitt von zweien, sondern durch den gleichzeitigen Schnitt von dreien derselben.

Schliesslich bemerken wir noch, dass die Involution conjugirter Durchmesser, welche den Projectionen aller Horizontalschnitte des Paraboloids gemeinschaftlich ist, auch nach dieser Ausgleichungsmethode unmittelbar erhalten wird, da die den gesuchten Punct bestimmenden Spurlinien der benutzten Diametralebenen, zusammengenommen mit den Richtungen der zugehörigen parallelen Grundkanten, ebenso viele Paare conjugirter Durchmesser aus jener Involution bilden. Jede Ellipse, welche mit Hinzuziehung der letzteren um den gefundenen Punct als Mittelpunct durch einen beliebigen anderen Punct derselben Ebene bestimmt wird, hat hier in dem Sinne die Bedeutung einer Niveaucurve, dass für einen jeden ihrer Puncte die Quadratsumme aller zugehörigen Richtungs- resp. Winkeländerungen eine Constante ist.

III. Die synthetisch-graphische Ausgleichung.

Bei der vorigen Methode wurden wir nur durch die Flächenordinaten an den im I. Abschnitte beobachteten stufenweisen Aufbau des Paraboloids erinnert, während im übrigen die Construction selbst an der als fertig gedachten Fläche zur Ausführung kam. Anderseits wurde aber auch gerade durch die befolgte Bildungsweise jener Flächenordinaten ein Moment in die Ausgleichung mit hineingebracht, das dem Wesen einer graphischen Methode an sich durchaus fremd ist. Die numerischen Operationen hätten zwar, dem Prinzip zu Gefallen, auch dort durch entsprechende graphische Constructionen ersetzt werden können; allein der angeblich dadurch erzielte Gewinn wäre

durch die grössere Umständlichkeit infolge Herstellung noch weiterer Hülfsfiguren wohl mehr als aufgewogen worden. Anders verhält es sich hierin mit der folgenden, in ihrer Ausführung rein graphischen Methode, die in doppelter Hinsicht zugleich eine synthetische genannt werden kann; denn einerseits folgt sie von Anfang bis zu Ende dem Gedankengange der stufenweisen Zusammensetzung der zu Grunde gelegten Flächen, anderseits bedient sie sich aber auch zur Erreichung ihres Zieles nur der Hülfsmittel der synthetischen Geometrie. Die Grundidee dieser synthetisch-graphischen Ausgleichungsmethode ist schon im I. Abschnitte in den auf pag. 279 angegebenen Consequenzen ausgesprochen worden, so dass wir hier nur noch im einzelnen zu zeigen haben werden, wie die fortgesetzte Anwendung jenes Princips, auch wenn wir an die Anfangselemente anknüpfen, uns wirklich bis an's Endziel führen muss.

Jede von den n Bestimmungsgeraden in der Grundebene (s. Fig. 3, Tafel III.) kann angesehen werden als die Scheitellinie eines parabolischen Cylinders. Denken wir uns das ganze System dieser n Flächen erster Stufe durch eine beliebige Horizontalebene geschnitten, so erhalten wir von jeder derselben je zwei Erzeugende, deren Projectionen ebenfalls parallel sind der zugehörigen Bestimmungsgeraden. Die letztere befindet sich dabei in der Mitte des Streifens zwischen den beiden Parallelen und zwar in einem Abstande, welcher bei allen eine gleich grosse Secundenänderung — resp. eine solche, die gleich stark in's Gewicht fällt — im posititiven oder im negativen Sinne repräsentirt. *) Diese n Paare je paralleler

*) Wenn sämmtlichen Bestimmungsgeraden gleich genaue Messungen zu Grunde liegen, so kann man jene Abstände einer

Geraden bilden in der Grundebene $\frac{n(n-1)}{2}$ Parallelogramme; die Mittelpuncte derselben sind die gegenseitigen Schnittpuncte der n Bestimmungsgeraden, die wir schon früher mit S_{ab}, S_{bc} etc. bezeichneten. Auch hier betrachten wir sie als Scheitel der Flächen zweiter Stufe, oder als Scheitel der zugehörigen Involutionen conjugirter Durchmesser, auf die wir im I. Abschnitte aufmerksam gemacht haben (s. pag. 275). Wie wir dort gesehen, wird eine jede dieser Involutionen vollständig bestimmt durch die beiden Bestimmungsgeraden selbst, als erstes Paar, und durch die beiden Diagonalen des zugehörigen Parallelogramms, als zweites Paar conjugirter Durchmesser, so dass man für eine beliebige Richtung je den conjugirten Strahl linear construiren kann. Von den $\frac{n(n-1)}{2}$ Scheiteln brauchen wir jedoch hier in jeder Bestimmungsgeraden deren höchstens je zwei, da zur Durchführung unserer Construction nur n-1 Involutionen dieser Stufe, sowie von denen der nachfolgenden Stufen immer je eine weniger, erforderlich sind. — Seien

a, b, c, d, $e \ldots$

die gegebenen Bestimmungsgeraden, so fassen wir in's Auge etwa die Scheitel

S_{ab} S_{bc} S_{cd} S_{de}

und construiren aus der zugehörigen Involution zu den Richtungen von

c a und d b und e c

die conjugirten Strahlen resp.

c_{ab} a_{bc} und d_{bc} b_{cd} und e_{cd} c_{de}

Situationsfigur in beliebig kleinem Massstabe direct entnehmen. Vgl. pag. 286 und 287.

Nun wird durch das Hinzutreten von c zu a und b der Scheitel S_{ab} abgelenkt auf dem Strahle c_{ab}, und ebenso findet durch das Hinzutreten von a zu b und c auch für den Scheitel S_{bc} eine Ablenkung statt auf dem Strahle a_{bc} (vgl. pag. 279). Somit liegt der neue Scheitel S'_{abc} im Schnittpuncte von c_{ab} und a_{bc}. Dem analog finden wir auch S'_{bcd} *und* S'_{cde} in dem Schnittpuncte resp. von d_{bc} und b_{cd}, e_{cd} und c_{de}. Diese Projectionen der n-2 Scheitel von Flächen dritter Stufe, so viele wir deren hier gerade brauchen,

$$S'_{abc} \qquad S'_{bcd} \qquad S'_{cde}$$

sind zugleich wieder die Scheitel von zugehörigen Involutionen conjugirter Durchmesser, von denen wir durch die obigen Constructionen die resp. Paare

c_{ab} u. d. Richtung v. c; d_{bc} u. d. Richtung v. d;
a_{bc} » » » » a; b_{cd} » » » » b;
e_{cd} u. d. Richtung v. e;
c_{de} » » » » c

bereits kennen, da sie den resp. Scheiteln zweiter und dritter Stufe gemeinschaftlich angehören. Suchen wir jetzt zu den Richtungen von

$$d \qquad a \text{ und } e \qquad b$$

aus jenen Involutionen dritter Stufe die conjugirten Strahlen resp.

$$d_{abc} \qquad a_{bcd} \text{ und } e_{bcd} \qquad b_{cde}$$

so liegen die n-3 Scheitel vierter Stufe, nämlich hier:

$$S'_{abcd} \qquad S'_{bcde}$$

in den Schnittpuncten der auch ihnen selbst angehörenden Involutionstrahlen

$$d_{abc} \text{ und } a_{bcd} \qquad e_{bcd} \text{ und } b_{cde}$$

Für die Involutionen dieser Stufe haben wir daher die bestimmenden Paare:

d_{abc} u. d. Richtung v. d; e_{bcd} u. d. Richtung v. e;
a_{bcd} » » » » a; b_{cde} » » » » b,
so dass wir in denselben aufsuchen können die conjugirten Strahlen resp.

e_{abcd} zu d. Richtung v. e; a_{bcde} zu d. Richtung v. a, welche sich in der Projection S'_{abcde} des Scheitels einer der n-4 Flächen fünfter Stufe schneiden müssen. Waren nur 5 Bestimmungsgeraden gegeben, so haben wir mit S'_{abcde} den Scheitel des Paraboloids oberster Stufe gefunden; anderenfalls würden wir — die nöthigen Erweiterungen vorausgesetzt — in der angegebenen Weise fortzufahren haben, bis wir wieder bei einem einzigen Scheitel angelangt wären, der dann den wahrscheinlichsten Punct in der fehlerzeigenden Figur enthielte. —

Aus dem Obigen ergiebt sich, dass mit Ausnahme der n-1 Scheitel zweiter Stufe, S_{ab}, S_{bc} etc., welche schon durch die fehlerzeigende Figur selbst gegeben sind, alle übrigen der nachfolgenden Stufen, also noch

$$(n-2) + (n-3) + \ldots 3 + 2 + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \text{ Scheitel}$$

erst construirt werden müssen. Da wir zur Bestimmung derselben immer je zwei Strahlen aus den unmittelbar vorangehenden Involutionen nöthig haben, die selbst wieder nur durch eine besondere Construction vermittelst mehrerer Hülfsgeraden erhältlich zu sein scheinen, so hätten wir nach einer der gewöhnlichen Behandlungsweisen involutorischer Büschel, wenn eine grössere Anzahl von Bestimmungsgeraden vorliegen sollte, eine so beträchtliche Constructionsarbeit zu bewältigen, dass der relative praktische Werth dieser Methode stark in Frage käme. Wie wir gleich sehen werden, verhält es sich aber in Wirklichkeit damit so, dass *von allen obigen (n-1) (n-2) In-*

volutionsstrahlen nur die 2 (n-2) ersten construirt zu werden brauchen, welche zur Bestimmung der n-2 Scheitel dritter Stufe dienen mussten, und zwar eine jede von ihnen vermittelst nur zweier eigener Hülfsgeraden, während alle übrigen (n-3) (n-2) Involutionsstrahlen nicht erst eine besondere Construction erfordern, sondern mit dem Lineal allein unmittelbar in die Figur eingetragen werden können. Wenn wir die Darstellung des Horizontalschnittes aller n Flächen erster Stufe, durch je 2 Parallelen zu den Bestimmungsgeraden, sowie die Einzeichnung der beiden Diagonalen in je $n-1$ Parallelogramme, als vorbereitende Arbeit betrachten, die hier gewissermassen an die Stelle des Diagramms bei der numerisch-graphischen Methode tritt, so haben wir demnach weiterhin im ganzen nur noch $6(n-2)+(n-3)(n-2)=\underline{(n+3)(n-2)}$ Hülfsgeraden zu ziehen, um den gesuchten Punct des ganzen Problems zu finden. *) Zur weiteren Vergleichung mit der vorigen Methode (im II. Abschnitte) bemerken wir, dass erst bei 6 gegebenen Bestimmungsgeraden das Minimum der dort erforderlichen Hülfsgeraden erreicht wird, wobei hier immer noch die ganze Messungsarbeit für die Fusspunctsabstände der Flächenordinaten sowie die Herstellung der Rechnungstabelle in Wegfall kommt.

Um die Berechtigung zu den vorstehenden Behauptungen darzuthun, beweisen wir zunächst den folgenden allgemeineren dualistischen Satz: (s. Fig. 2, Taf. I.)

Wenn zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 in einer Geraden p ihrer Ebene die nämliche Involution harmonischer Pole

---

*) Zusammengenommen mit den obigen $2n$ Parallelen und $2(n-1)$ Diagonalen beträgt die Gesammtanzahl der zur Construction nach dieser Methode erforderlichen Hülfsgeraden n^2+5n-8.

und in einem Puncte P die nämliche Involution der zugehörigen harmonischen Polaren besitzen,

so liegen für eine beliebige Gerade g derselben Ebene die zugehörigen Pole G_1 und G_2 in Bezug auf K_1 und K_2 in einer Geraden mit P.

Bew. Jeder Punct der Polare p hat nach Voraussetzung eine gemeinschafliche Polare in Bezug auf K_1 und K_2, welche durch den Pol P geht; also auch der in p gelegene Punct S. Da aber S zugleich in g liegt, als Schnittpunct von p und g, so muss seine Polare s anderseits auch die zugehörigen Pole G_1 und G_2 enthalten.

so schneiden sich für einen beliebigen Punct A derselben Ebene die zugehörigen Polaren a_1 und a_2 in Bezug auf K_1 und K_2 in einem Puncte auf p.

Bew. Jeder Strahl aus dem Pol P hat nach Voraussetzung einen gemeinschaftlichen Pol in Bezug auf K_1 und K_2, der in der Polaren p liegt; also auch der durch P gehende Strahl q. Da aber q zugleich durch A geht, als Verbindungslinie von P und A, so muss sein Pol Q anderseits auch in den zugehörigen Polaren a_1 und a_2 enthalten sein.

Consequenzen. Wenn der Punct A in der Geraden g liegt, so gehen die Polaren a_1 und a_2 resp. durch die Pole G_1 und G_2, und wenn man A die Punctreihe in g durchlaufen lässt, so drehen sich a_1 und a_2 resp. um G_1 und G_2; sie erzeugen dadurch *zwei Strahlenbüschel, welche auf p perspectivisch sind, mit der Polaren des Schnittpunctes von g und p als entsprechend gemeinschaftlichem Elemente.*

Weil die collinearen Beziehungen der obigen Sätze durch Projection nicht gestört werden könnten, so gelten dieselben auch dann noch, wenn an Stelle der beliebigen Geraden g die unendlich ferne Gerade derselben Ebene angenommen wird. G_1 und G_2 sind dann die Mittelpuncte

der beiden Kegelschnitte; die Involutionen harmonischer Polaren um G_1 und G_2 verwandeln sich in die zugehörigen Involutionen conjugirter Durchmesser, der beliebige Punct A wird zur Richtung eines unendlich fernen Punctes, als dessen Repräsentanten wir uns eine beliebige Gerade a in derselben Ebene denken können; die der Richtung von a conjugirten Durchmesser a_1 und a_2 resp. von K_1 und K_2 schneiden sich in einem Puncte der gemeinschaftlichen Polaren p, als Trägerin der nämlichen Involution harmonischer Pole in Bezug auf K_1 und K_2; besitzt die letztere reelle Doppelpuncte, so ist p die Berührungssehne der beiden Kegelschnitte, und P der Schnittpunct ihrer gemeinschaftlichen Tangenten. Betrachten wir endlich mehrere Geraden in derselben Ebene a, b, c, ..., so ist das Büschel der ihren Richtungen conjugirten Durchmesser a_1, b_1, c_1, ... des ersten Kegelschnitts perspectivisch auf der Berührungssehne mit dem entsprechenden Büschel a_2, b_2, c_2 .... des zweiten. Das entsprechend gemeinschaftliche Element der beiden Büschel oder der gemeinschaftliche Durchmesser der beiden Kegelschnitte ist in Bezug auf beide gleichzeitig conjugirt zu dem unendlich fernen Puncte der perspectivischen Achse, oder zu der Richtung der Berührungssehne.

Wie in den letzten Ausführungen des I. Abschnittes auf pag. 280 bis 282 nachgewiesen worden ist (s. den Grundriss bei Fig. 1, Taf. I.), treffen die Voraussetzungen für diesen speciellen Fall der obigen Sätze vollständig zu bei jedem Horizontalschnitte je zweier Paraboloide von benachbarter Stufe, wenn sich dieselben nur durch eine nicht gemeinschaftlich zugehörige Bestimmungsgerade unterscheiden. Wir können daher im folgenden die nämliche Horizontalebene zu Grunde gelegt denken,

von deren Schnitterzeugenden aus sämmtlichen Flächen erster Stufe wir weiter oben ausgegangen waren (s. pag. 292 und Fig. 3, Taf. III.) Auch diese schneidet je zwei solche Flächen von benachbarter höherer Stufe in zwei sich doppelt berührenden Ellipsen. Die Berührungssehne derselben — in der Projection auf die Grundebene – ist durch die je nicht gemeinschaftliche Bestimmungsgerade selbst unmittelbar gegeben, und die Mittelpuncte der Ellipsen haben wir in den Scheitelpuncten der zugehörigen Involutionen conjugirter Durchmesser, die wir jetzt in der folgenden einfachen Weise bestimmen können.

Nehmen wir etwa den obersten Scheitel S'_{abcde}, und einen der unmittelbar vorangegangenen, wie S'_{abcd}, so ist hier e, als die einzige nicht gemeinschaftliche Bestimmungsgerade, zugleich die Berührungssehne der zugehörigen Horizonalschnitte. Gemäss den Folgerungen des auf pag. 297 bewiesenen Satzes wird daher e selbst die perspectivische Achse sein müssen für die beiden Büschel, welche sich aus den conjugirten Strahlen zu den Richtungen sämmtlicher Bestimmungsgeraden a, b, c, ... einerseits in Bezug auf den Scheitel S'_{abcd}, anderseits in Bezug auf den Scheitel S'_{abcde} ergeben. Nun haben wir aus diesen beiden Büscheln nicht nur den entsprechend gemeinschaftlichen Strahl e_{abcd} (oder e_{abcde}), sondern auch noch die der Richtung von a conjugirten Strahlen, zur theilweisen Bestimmung ihrer resp. Scheitel aus je einem früheren Scheitel nach der auf pag. 294 und 295 angegebenen Construction, wirklich gebraucht:

a_{bcd} (oder a_{abcd}) zur Bestimmung von S'_{abcd} aus S'_{bcd},
a_{bcde} (» a_{abcde}) » » » S'_{abcde} » S'_{bcde}.
(s. Fig. 3, Taf. III).

Somit können wir den letzteren dieser Strahlen auch

ohne weitere Construction erhalten, einfach als Verbindungslinie des Scheitels S'_{bcde} *mit demjenigen Puncte der perspectivischen Achse e, in welchem dieselbe von dem ersteren Strahle getroffen wird, wobei wir als bekannt voraussetzen die 3 Scheitel:*

$$S'_{abcd} \qquad S'_{bcd} \qquad S'_{bcde}.$$

Ganz analoge Beziehungen, wie wir sie kennen gelernt haben zwischen

$$S'_{abcd} \text{ und } S'_{abcde} \text{ in Bezug auf } e \text{ und } a,$$

bestehen aber auch für den anderen vorangegangenen Scheitel, also zwischen

$$S'_{bcde} \text{ und } S'_{abcde} \text{ in Bezug auf } a \text{ und } e.$$

Die hier nicht gemeinschaftliche Bestimmungsgerade a muss die perspectivische Achse sein für die betreffenden Strahlenbüschel aus S'_{bcde} und S'_{abcde}. Während ihr entsprechend gemeinschaftlicher Strahl der Richtung der perspectivischen Achse a conjugirt war, erhielt sowohl der eine wie auch der andere dieser beiden Scheitel, behufs seiner theilweisen Bestimmung aus einem der früheren, auch je einen der Richtung von e conjugirten Strahl:

e_{bcd} (oder e_{bcde}) zur Bestimmung von S'_{bcde} aus S'_{bcd},
e_{abcd} (» e_{abcde}) » » » S'_{abcde} » S'_{abcd}.

Wenn wir daher dieselben 3 Scheitel wie vorhin als bekannt voraussetzen, so erhalten wir e_{abcd} *einfach als Verbindungslinie des Scheitels* S'_{abcd} *mit dem Schnittpuncte der jetzigen perspectivischen Achse* a *und des Strahls* e_{bcd}.

Da nun a_{bcde} und e_{abcd} die beiden bestimmenden Strahlen waren, durch deren gegenseitigen Schnittpunct der oberste Scheitel nämlich

$$S'_{abcde} \text{ aus } \begin{Bmatrix} S'_{abcd} \\ S'_{bcde} \end{Bmatrix} \text{ und } S'_{bcd}$$

abgeleitet wurde, so fassen wir die letzten Resultate in folgende erweiterte Sätze zusammen:

1. Zwei Scheitel der nämlichen Stufe mit nur je einem abweichenden Index (wie S'_{abcd} und S'_{bcde}) betrachten wir als die Gegenecken eines gewöhnlichen Vierecks, dessen andere Gegenecken sein sollen: der Scheitel nächst niederer Stufe mit denselben gemeinschaftlichen Indices (S'_{bcd}) und der Scheitel nächst höherer Stufe, der neben den gemeinschaftlichen auch die beiden abweichenden Indices enthält (S'_{abcde}).

2. Jede Seite dieses Vierecks ist in Bezug auf ihre Endpuncte derjenigen Bestimmungsgeraden gleichzeitig zugeordnet, welche dem nicht gemeinschaftlichen Index der beiden Endpuncte entspricht, so dass die Gegenseiten des Vierecks je die nämliche zugeordnete Bestimmungsgerade haben.

3. *Jeder Eckpunct des Scheitelvierecks wird durch die Lage der drei übrigen nach dem Gesetze bestimmt, dass ein jedes Paar der Gegenseiten sich in einem Puncte der dem andern Paare zugeordneten Bestimmungsgeraden schneiden muss.* *)

---

*) Diese Constructionsregel versagt ihren Dienst zur Bestimmung von S'_{abcde} aus den drei anderen Scheiteln nur in dem Falle, wenn der zu bestimmende Stationspunct mit den Bestimmungspuncten A und E in gerader Linie liegen sollte. Die Bestimmungsgeraden a und e — als Vorwärtsvisuren gedacht — sind dann einander parallel; die ihren Richtungen conjugirten Strahlen aus je einem Scheitel werden identisch, und das obige Vierseit degenerirt in eine vierfache gerade Linie. Um letzterem auszuweichen, brauchte man nur zum Voraus eine andere Anordnung in Bezug auf die Reihenfolge der Bestimmungsgeraden zu treffen, indem man a und e zwei Nachbarelemente sein lässt. Will man dagegen die frühere Reihenfolge beibehalten, so kann man S'_{abcde} auch als denjenigen Punct construiren, welcher zusammen mit dem Gegenpuncte S'_{bcd}

Nach dem gleichen Gesetze, wie wir einen Scheitel fünfter Stufe abgeleitet haben, lässt sich überhaupt jeder Scheitel höherer Stufe bestimmen, wenn die Scheitel der beiden nächst niederen Stufen schon bekannt sind. So können hier insbesondere auch noch sämmtliche n-3 Scheitel der vierten Stufe vor denen der fünften bestimmt werden, sobald wir nur die Scheitel dritter und zweiter Stufe als bekannt voraussetzen dürfen; es ergiebt sich nämlich

S'_{abcd} aus $\left\{\begin{matrix} S'_{abc} \\ S'_{bcd} \end{matrix}\right\}$ und S_{bc}; S'_{bcde} aus $\left\{\begin{matrix} S'_{bcd} \\ S'_{cde} \end{matrix}\right\}$ *und* S_{cd}

Nun sind uns zwar sämmtliche Scheitel der zweiten Stufe schon zum Voraus gegeben in den gegenseitigen Schnittpuncten der Bestimmungsgeraden; dagegen die erforderlichen n-2 Scheitel der dritten Stufe müssen je durch eine besondere Construction selbst erst gefunden werden. Von dem obigen Gesetze können wir aber hierbei keinen Gebrauch mehr machen, weil dazu die Scheitelpuncte erster Stufe (S_b, S_c, S_d) als solche überhaupt fehlen. *) Die beiden bestimmenden Strahlen eines Schei-

---

ein drittes Paar der nämlichen involutorischen Punctreihe bildet, als deren bestimmende Paare die beiden Scheitelpuncte mittlerer Stufe und die beiden Schnittpuncte in den perspectivischen Achsen anzusehen sind (s. Fig. 4, Taf. III.)

*) An ihre Stelle treten durch die Bestimmungsgeraden b, c, d die Scheitellinien parabolischer Cylinder, welche je zwei Scheitel der zweiten Stufe miteinander verbinden. Dadurch degenerirt z. B. das theoretische Scheitelviereck S'_{abc} S_{ab} (S_b) S_{bc} in ein Scheiteldreieck S'_{abc} S_{ab} S_{bc} mit einer doppelten Seite als Grundlinie; denn mit Bezug auf jeden ihrer Endpuncte ist diese als zugeordnet anzusehen je der zweiten durch ihn gehenden Bestimmungsgeraden, so dass hier b sowohl mit a_b als auch mit c_b bezeichnet werden könnte. Die perspectivischen Achsen, welche je in der dritten der in Betracht kommenden Bestimmungsgeraden zu suchen sind, also hier in c und a, gehen dabei je durch den anderen Endpunct der Grundlinie selbst hindurch, so dass die beiden übrigen Seiten

tels dritter Stufe sind daher einzeln je aus der Involution eines Scheitels zweiter Stufe direct zu construiren, wozu wir nur je zwei eigene Hülfsgeraden nöthig haben werden, die nicht bereits vorliegen.

So erhalten wir für den Scheitel S'_{abc} den einen bestimmenden Strahl c_{ab} als conjugirt zu der Richtung von c aus dem Scheitel S_{ab} durch die folgende Construction: (s. Fig. 2, Taf. III). Seien m und m^* die Diagonalen des Parallelogramms, welches von den beiden Parallelen je zu a und b gebildet wird, so ist die Involution um S_{ab} bestimmt durch die Paare a und b, m und m^*; die eine der beiden Parallelen zu c sei p. Bezeichnen wir ferner den Schnittpunct von c und m^* mit M^*, desgleichen den Schnittpunct von p und m mit M, und den von p und a mit S^*_{bc}, so sei h die Verbindungslinie von S_{bc} und M, ebenso h^* diejenige von S^*_{bc} und M^*. Diese beiden Hülfsgeraden h und h^* schneiden sich gegenseitig in einem Puncte C^*, dessen Verbindungslinie mit S_{ab} der gesuchte Strahl c_{ab} sein muss. Denn wollten wir zu c noch die Parallele c^* durch S_{ab} ziehen, so bilden die vier Geraden c, p, h, h^* ein vollständiges Vierseit, dessen Gegenecken S_{bc} und S^*_{bc}, M und M^*, $\overset{\infty}{C}$ und C^*, von S_{ab} aus projicirt werden. Die Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits werden aber mit jedem Puncte derselben Ebene durch drei Strahlenpaare einer nämlichen Involution verbunden; also gehören auch c_{ab} und c^*, als drittes Paar, der nämlichen

---

jenes Dreiecks, nämlich a_{bc} und c_{ab}, die zur Ermittelung des unbekannten Scheitels dritter Stufe dienen müssen, hier nicht ohne weiteres als die Verbindungslinien von je zwei Puncten eingezeichnet werden können; denn die letzteren fallen in je einen einzigen Punct zusammen, in den nämlichen Endpunct der Grundlinie, von dem jene Seiten je auszugehen haben. (vgl. d. Schema pag. 305 und Fig. 1, Taf. IV).

durch a und b, m und m^* bestimmten Involution an. — Ganz in derselben Weise construiren wir für S'_{abc} auch den anderen bestimmenden Strahl a_{bc}, und zwar aus dem Scheitel S_{bc} als conjugirt zu der Richtung von a.*)

Zur Bestimmung der übrigen Scheitel dritter Stufe ergeben sich analog

für S'_{bcd} die Strahlen d_{bc} und b_{cd} resp. aus S_{bc} und S_{cd},
» S'_{cde} » » e_{cd} » c_{de} » » S_{cd} » S_{de}.

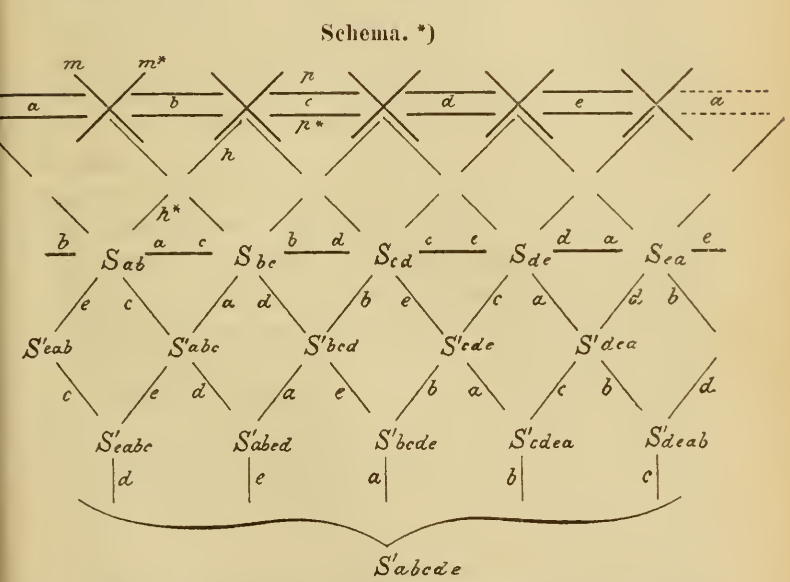
Durch die obigen Entwickelungen dieses Abschnittes ist die Construction der synthetisch-graphischen Ausgleichungsmethode in allen ihren einzelnen Theilen ausführlich dargelegt worden. Haben wir aber bisher von den Mitteln derselben nur so weit Gebrauch gemacht, als zur Lösung des Problems gerade nothwendig war, so fügen wir jetzt noch hinzu, dass der gesuchte Punct auch hier durch den gleichzeitigen Schnitt von drei Geraden gefunden werden kann, sobald man nur bei der ersten Aufstellung der bestimmenden Elemente die Kette ringförmig schliesst, also auf die letzte Bestimmungsgerade wieder die erste folgen lässt. Dadurch werden in jeder derselben 2 Scheitel zweiter Stufe in Betracht gezogen, so dass man im Ganzen von n solchen auszugehen hätte, aus denen dann auch für die nachfolgenden Stufen immer je ein weiterer Scheitel neben den bisherigen abgeleitet werden

---

*) Statt der Bestimmungsgeraden c könnte man ebensogut p^*, die andere der beiden Parallelen von c, zur Construction von h und h^* benutzen, wodurch eventuell ein schärferer Schnittpunct bei C^* erzielt wird. Aus dem nämlichen Grunde und insbesondere, wenn der Punct M auf dem Zeichnungsblatte in p nicht erhältlich sein sollte, kann auch p durch eine beliebige andere, näher an S_{ab} liegende Parallele zu c ersetzt werden. Zieht man diese Parallele etwa durch den Schnittpunct zweier Diagonalen (aus S_{ab} und aus S_{bc}), so wird dafür eine der beiden Linien h oder h^* erspart.

kann. Hat man auf diese Weise **drei** Scheitel der zweitobersten Stufe bestimmt — gemäss dem früheren Beispiel S'_{abcd}, S'_{bcde}, S'_{cdea} — so ergiebt sich der **einzige** Scheitel der **obersten** Stufe S'_{abcde} durch den gleichzeitigen Schnitt derjenigen drei Strahlen, welche in Bezug auf den letzteren und je einen der ersteren conjugirt sind, resp. der letzten, der ersten und der zweiten Bestimmungsgeraden. Die Anzahl der **neu** hinzukommenden Constructionslinien beträgt in diesem Falle $2n \pm 1$, je nachdem $n \geq 3$ ist.

Schema. *)



Wollte man (nach dem hier angegebenen Schema) auf **allen** Stufen den Ring der Kette für die Scheitel schliessen, so dass bis zur zweitobersten Stufe hinauf deren je n zu bestimmen wären, so erhielte man zuletzt, auch

*) In dem obigen Schema finden sich symbolisch angedeutet **sämmtliche** Hülfslinien, die zur allseitigen Bestimmung des obersten Scheitels erforderlich sind (vgl. Fig. 1, Taf. IV).

wenn mehr als drei Bestimmungsgeraden gegeben sind, den obersten Scheitel durch den gleichzeitigen Schnitt von n Strahlen, von denen ein jeder je einer anderen Bestimmungsgeraden conjugirt wäre. Zu den früheren n^2+5n-8 Constructionslinien (s. Anm. pag. 296) kämen jetzt, da $n > 3$, im Ganzen hinzu n^2-2n+8, wodurch die Gesammtanzahl derselben steigen würde auf $\underline{n(2n+3)}$. (s. Fig. 2, Taf. IV.)

Durch die gleichmässige Anwendung eines nämlichen Princips kann also das ganze System der einander widersprechenden n Bestimmungsgeraden auf rein geometrischem Wege durch ein anderes System von n widerspruchsfreien geometrischen Oertern des gesuchten Punctes ersetzt werden.

Von Interesse dürfte es sein, dieses Transformationsprincip näher zu verfolgen, welchem eine jede der einander widersprechenden Bestimmungsgeraden durch die fortlaufende Umwandelung ihres resp. conjugirten Strahles von Stufe zu Stufe in consequenter Weise unterworfen ist, bis sie sich zuletzt für die beiden obersten Stufen in ein vollkommen widerspruchsfreies Element verwandelt hat. Ein jeder dem ursprünglichen Elemente conjugirte Strahl — den wir hier nur als eine Modification desselben auffassen — enthält nämlich 1. den Scheitel, welcher allen den anderen Bestimmungsgeraden allein zugehört, denen jene auf ihrem Transformationsprocesse schon begegnet war, sowie 2. den Scheitel, bei dem sie neben jenen anderen auch selbst vertreten ist; trifft sie in diesem Stadium ihrer Entwickelung die nächste Bestimmungsgerade, wie ein neues Hinderniss, das bisher noch keine Berücksichtigung gefunden, so wird die Richtung des Strahles von jener Stelle an wieder gebrochen, und zwar nach demjenigen Scheitel hin (derselben Stufe, wie der bei 2. genannte), bei welchem

die zuletzt getroffene Bestimmungsgerade an Stelle der ursprünglichen erscheint; in dieser neuen Richtung gelangt man dann zum Scheitel nächst höherer Stufe, bei welchem beide neben den früheren Bestimmungsgeraden gleichmässig vertreten sind.

Auf diese Weise bilden alle *n-1* conjugirten Strahlen einer nämlichen Bestimmungsgeraden mit dieser selbst einen fortlaufenden Linienzug, oder ein *n* Eck, dessen Eckpuncte der Reihe nach in je einer Bestimmungsgeraden liegen müssen.*) So geht a (oder a_0) durch den unbestimmten Scheitel (S_a) bis zu b, wo a gebrochen wird zu a_b (oder b); ebenso der Strahl:
a_b durch (S_b) und S_{ab} bis zu c, wo er gebrochen wird zu a_{bc};
a_{bc} » S_{bc} » S'_{abc} » » d, » » » » » a_{bcd};
a_{bcd} » S'_{bcd} » S'_{abcd} » » e, » » » » » a_{bcde};
a_{bcde} » S'_{bcde} » S'_{abcde} » » a, » » übergeht wieder in a.

Da aber nach dieser vervollständigten synthetischen Methode jeder Bestimmungsgeraden nicht nur ein sondern je zwei Systeme von *n-1* conjugirten Strahlen zugehören, je nachdem man den Weg über das eine oder das andere Nachbarelement hinaus verfolgt, so gelangt man von a bis zum Endstrahl a_{bcde}
sowohl durch die Uebergänge a_b (oder b), a_{bc}, a_{bcd},
als auch » » » a_e (oder e), a_{de}, a_{cde}.

Nun lässt die Permutation der *n-1* übrigen Bestimmungselemente von b bis e 1. 2. 3. . . (*n-1*) Combinationsformen zu, von denen bei jeder vollständigen Construction je zwei zur Geltung kommen, so dass sich uns für jede einzelne Bestimmungsgerade 3. 4. 5. . . (*n-1*) verschiedene

*) Die Seiten dieses *n* Eckes werden von der ursprünglichen Bestimmungsgeraden in Puncten geschnitten, welche je den Scheitel der zugehörigen Berührungsparabel bezeichnen (s. I. Abschnitt, 1. Anm. pag. 277).

Methoden darbieten, um zur Endtransformation zu gelangen. Die einzige Willkür besteht daher nur noch in der Wahl der Reihenfolge bei Aufstellung der ersten Elemente, die mit Rücksicht auf die zu erzielenden Schnittpuncte dem praktischen Gechicke des Zeichners überlassen bleibt. Das Endresultat dagegen, durch mehrfache Proben gesichert, ist von jener Wahl vollständig unabhängig.

Zum Schluss noch ein Wort speciell über die Scheitelpuncte dritter Stufe. Während alle übrigen Scheitel höherer Stufe bei Anwendung der auf pag. 301 angegebenen Constructionsregel fast mit spielender Leichtigkeit sich ermitteln liessen, so erforderte die besondere Construction eines Scheitels dritter Stufe immer noch den dreifachen Aufwand an Zeit und Mühe, auch wenn das Einzeichnen der ersten Parallelen und Diagonalen nur als eine vorbereitende Arbeit aufgefasst werden sollte, die mehr mit den Scheitelelementen der beiden ersten Stufen in Beziehung zu setzen sei. Jene relative Umständlichkeit wird kaum zu vermeiden sein, so lange man sich nicht etwa blos mit angenäherten Scheiteln dritter Stufe begnügen will. Zwar giebt es noch eine andere exacte, von F. G. Gauss*) angegebene Construction, mit weniger Hülfslinien, die auf jeden einzelnen Scheitel dieser Stufe angewendet werden könnte; da dieselbe aber wieder Messungen von Linien und mehrfache numerische Operationen voraussetzt, so dürfte sie gegenüber unserer rein graphischen Behandlung des Problems wohl nur dann den Anspruch auf eine grössere Einfachheit und Kürze erheben, wenn blos drei Bestimmungsgeraden gegeben sind,

*) S. Voglers „Lehrbuch der praktischen Geometrie", I. Theil 1885, § 165.

also die ganze fehlerzeigende Figur aus einem einzigen Fehlerdreieck besteht. Den Nachweis dazu werden wir sofort bringen, sobald wir die Identität des Endresultates beider Constructionen festgestellt haben.

Nach der Gauss'schen Construction wird der Scheitel dritter Stufe als der Aehnlichkeitspunct zweier ähnlicher Dreiecke in ähnlicher Lage bestimmt. Das eine dieser Dreiecke ist das fehlerzeigende Dreieck selbst, dessen Seiten die zu messenden Längen s_1, s_2, s_3 haben,*) während das andere durch Construction je einer Parallelen zu jenen Seiten erhalten wird. Bezeichnet man mit l_1, l_2, l_3 die annähernd bekannten Längen der resp. Visirstrahlen, so verhalten sich die Abstände, in welchen diese Parallelen (consequent etwa nach der Seite der Gegenecke hin) zu ziehen sind, wie die Producte $s_1 l_1^2 : s_2 l_2^2 : s_3 l_3^2$.

Die Identität der von uns benutzten Involutionsstrahlen mit den hier auftretenden Aehnlichkeitsstrahlen lässt sich folgendermassen direct nachweisen. Nach der Construction auf pag. 303 (s. Fig. 2, Taf. III.) bildeten c_{ab} und c^* ein drittes Paar aus der durch a und b, m und m^* bestimmten Involution; wir haben daher die Doppelverhältnissgleichheit $(b\ a\ m^*\ c^*) = (a\ b\ m\ c_{ab})$, d. h.

$$\frac{\sin (b m^*)}{\sin (a m^*)} : \frac{\sin (b c^*)}{\sin (a c^*)} = \frac{\sin (a m)}{\sin (b m)} : \frac{\sin (a c_{ab})}{\sin (b c_{ab})},$$

somit ist $$\frac{\sin (a c_{ab})}{\sin (b c_{ab})} = \frac{\sin (b c^*)}{\sin (a c^*)} \cdot \frac{\sin (a m)}{\sin (b m)} \cdot \frac{\sin (a m^*)}{\sin (b m^*)}$$

*) Hat man die fehlerzeigende Figur aus den Differenzen der fehlerhaften Dreieckseiten construirt, so sind hier die Längen s_1, s_2, s_3 allerdings unmittelbar gegeben; hingegen nach Einhaltung der von Gauss angegebenen Herstellungsweise derselben müssen für die Ausgleichung diese Längen der fehlerzeigenden Figur erst entnommen werden. Vgl. Voglers „Lehrbuch der praktischen Geometrie", I. Theil 1885, § 162, und Jordans „Handbuch der Vermessungskunde" 1877, I. Bd., § 121.

Bezeichnen wir auch hier die Dreieckseiten $\overline{S_{ab}\,S_{ac}}$ und $\overline{S_{ab}\,S_{bc}}$ resp. mit s_1 und s_2, so ist, weil c^* parallel zu c, nach dem Sinussatz

$$\frac{\sin\,(b\,c^*)}{\sin\,(a\,c^*)} = \frac{\sin\,(b\,c)}{\sin\,(a\,c)} = \frac{\overline{S_{ab}\,S_{ac}}}{\overline{S_{ab}\,S_{bc}}} = \frac{s_1}{s_2}.$$

Die übrigen Quotienten $\frac{\sin\,(a\,m)}{\sin\,(b\,m)}$, $\frac{\sin\,(a\,m^*)}{\sin\,(b\,m^*)}$ und $\frac{\sin\,(a\,c_{ab})}{\sin\,(b\,c_{ab})}$ bedeuten je das Verhältniss der Abstände eines beliebigen Punctes resp. im Strahle m, m^* und c_{ab}, einerseits von a, anderseits von b. Nun waren m und m^* zugleich die beiden Diagonalen eines Parallelogramms, dessen zu a und b parallele Seiten von diesen Bestimmungsgeraden einen Abstand hatten proportional den Längen der resp. Visirstrahlen (s. pag. 292), die wir auch hier resp. mit l_1 und l_2 bezeichnen können. Somit ist, dem absoluten Werthe nach,

$$\frac{\sin\,(a\,m)}{\sin\,(b\,m)} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin\,(a\,m^*)}{\sin\,(b\,m^*)}$$

und infolge dessen $\frac{\sin\,(a\,c_{ab})}{\sin\,(b\,c_{ab})} = \frac{s_1}{s_2}\cdot\frac{l_1}{l_2}\cdot\frac{l_1}{l_2} = \frac{s_1\,l_1^2}{s_2\,l_2^2}$,

d. h. die Abstände eines jeden beliebigen Punctes im Involutionsstrahl c_{ab}, einerseits von a, anderseits von b, verhalten sich zu einander wie $s_1\,l_1^2 : s_2\,l_2^2$; also ist c_{ab} identisch mit dem entsprechenden Aehnlichkeitsstrahl der Gauss'schen Construction. Haben die Visuren ein ungleiches Gewicht, so sind nach beiden Constructionsarten die Längen l_1, l_2, l_3 durch die betreffenden Gewichtszahlen modificirt zu denken.

Vergleichen wir jetzt die wiederholte Anwendung beider Constructionen für den allgemeinen Fall von n

Bestimmungsgeraden, nach welchem wenigstens n-2, womöglich aber n-1, oder auch n Scheitel dritter Stufe in zusammenhängenden Fehlerdreiecken zu bestimmen sind, so bemerken wir, dass nach der Construction von Gauss die Arbeitssumme für jedes einzelne Fehlerdreieck unverändert die nämliche bleibt, wie wir sie bei der obigen Darstellung auf pag. 309 angedeutet haben. Nach unserer graphischen Methode dagegen tritt bei mehr als einem Scheitel dritter Stufe insofern eine Ermässigung ein, als diejenigen Hülfslinien, welche wir als einleitende oder als vorbereitende bezeichnet hatten, auf sämmtliche Scheitel dieser Stufe gleichmässig vertheilt gedacht werden können.

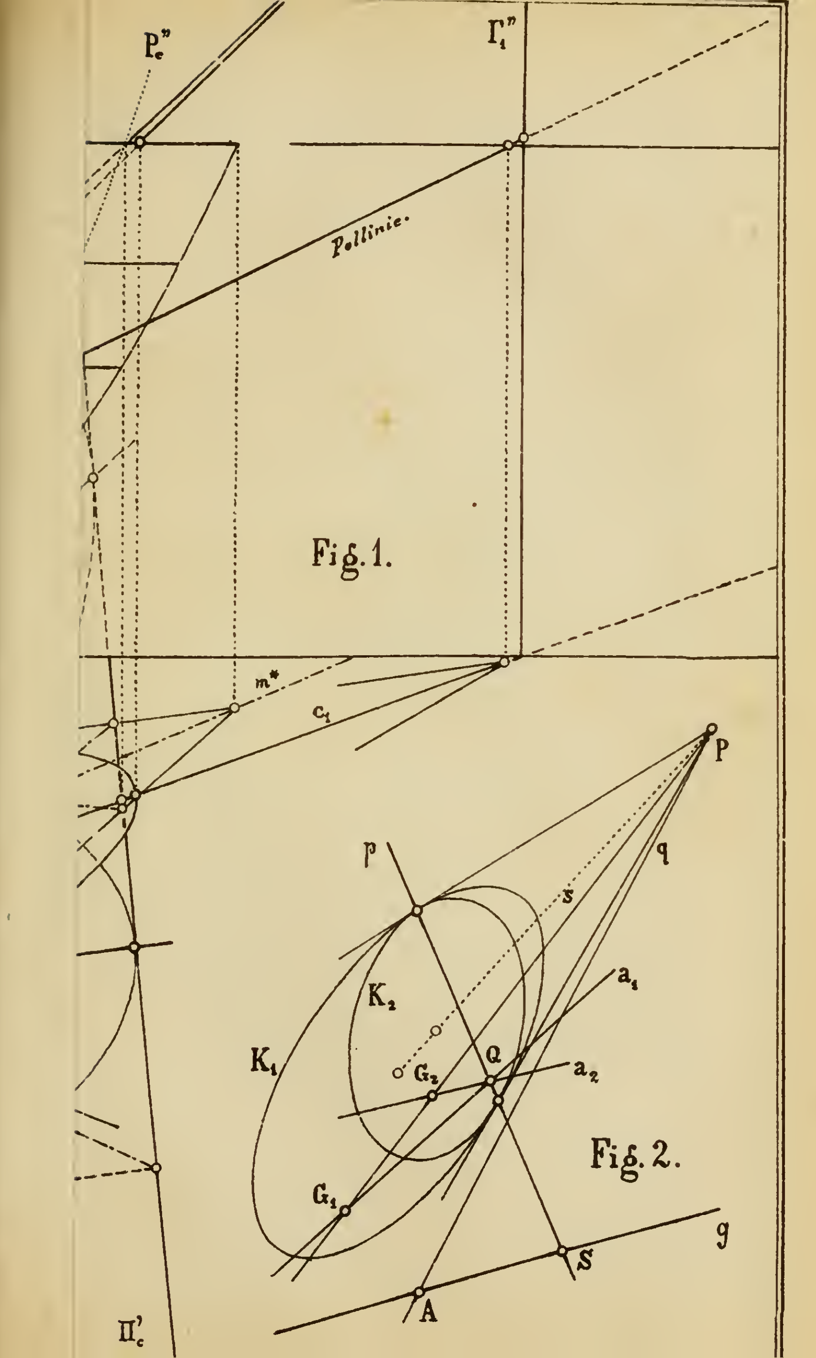
Um bis zu n Scheiteln dritter Stufe zu gelangen (vgl. d. Schema pag. 305), hatten wir gebraucht $2n$ Parallelen zu den Bestimmungsgeraden, $2n$ Diagonalen durch die Scheitel zweiter Stufe und je 2 bestimmende Involutionsstrahlen, die ihrerseits wiederum je 2 Hülfsgeraden h und h^* erforderten; im Ganzen $4n$ allgemeine und $6n$ besondere Hülfslinien. Denken wir uns nun auch die ersteren gleichmässig vertheilt, so beträgt der auf den einzelnen Scheitel dritter Stufe entfallende Antheil 4 allgemeine und 6 besondere. Unter diesen 10 Hülfslinien werden die zwei Parallelen durch eine nämliche unmittelbar gegebene Zirkelöffnung erhalten, mit der man zu beiden Seiten etwa der Grundlinie (welche die beiden Scheitel zweiter Stufe enthält), den Abstand der Parallelen bestimmt. Die übrigen 8 erfordern kein anderes Hülfsmittel als das Lineal allein, mit dem sie unmittelbar in die fehlerzeigende Figur eingetragen werden.

Die Construction von Gauss verlangt nun allerdings statt 10 blos 5 Hülfslinien, nämlich 3 Parallelen zu den Dreieckseiten und 2 Aehnlichkeitsstrahlen. Allein diese Ersparniss an 5 sichtbaren Hülfslinien wird mehr als auf-

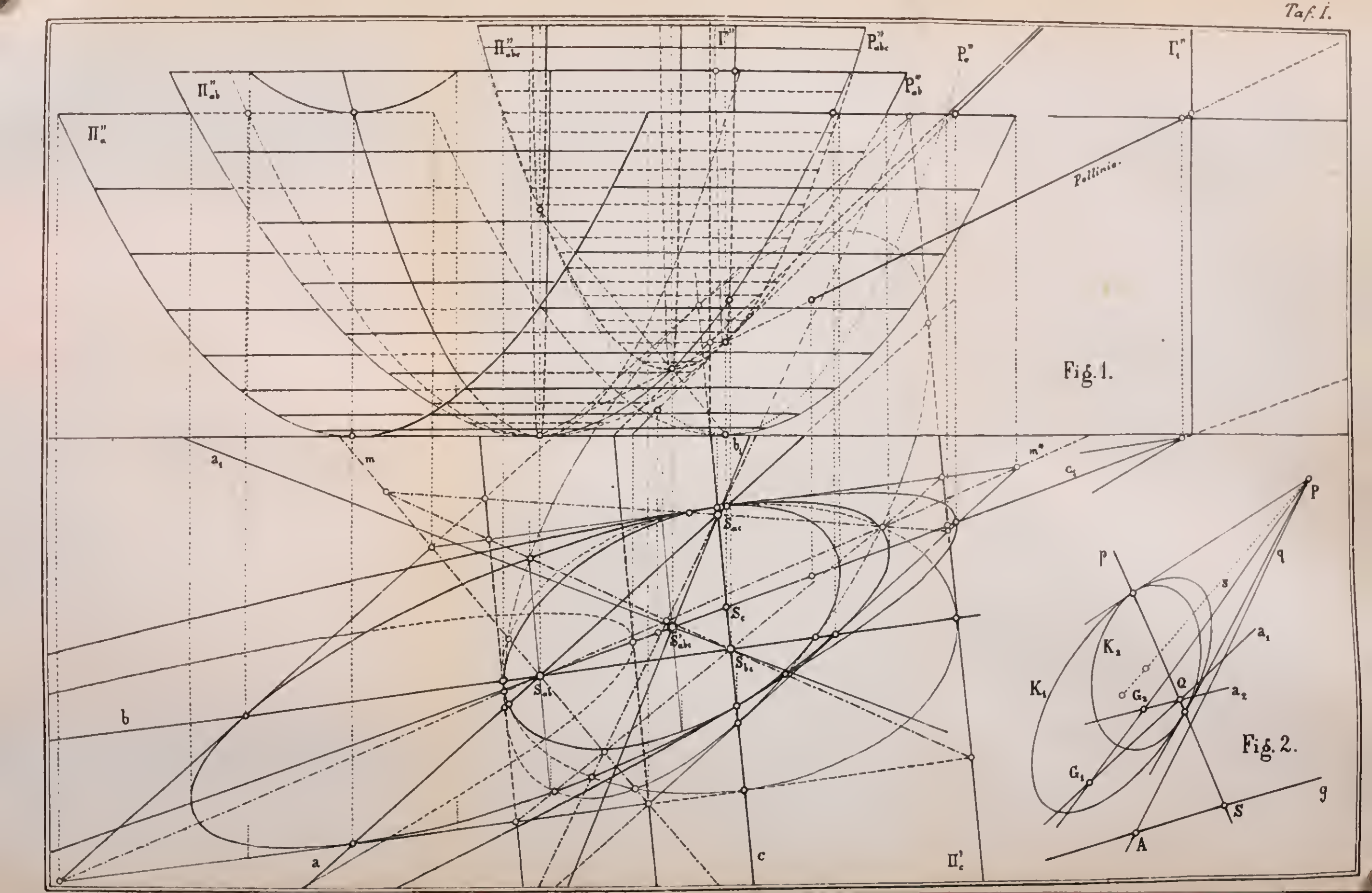
gehoben durch die Art und Weise, wie man zu den 3 Parallelen gelangt. Eine jede derselben kann nur mit Hülfe je einer eigenen Zirkelöffnung construirt werden, und diese 3 Zirkelöffnungen ergeben sich erst, nachdem man die drei Seiten s_1, s_2, s_3 des Fehlerdreiecks gemessen und dann die 3 Producte $s_1 l_1^2$, $s_2 l_2^2$, $s_3 l_3^2$ gebildet hat.

Selbst in dem Falle, dass man Werth darauf legen sollte, auch jeden Scheitel dritter Stufe durch den gleichzeitigen Schnitt dreier Geraden zu erhalten, bleibt es immer noch fraglich, welche Methode die kürzere sei. Nach der Gauss'schen Construction lässt sich zwar jenes einfach durch den dritten Aehnlichkeitsstrahl erreichen, während nach unserer Methode 5 neue Hülfsgeraden auftreten müssen (2 Diagonalen, 2 Linien h und h^*, und 1 Involutionsstrahl), so dass wir jetzt je 6 und 15 Hülfslinien mit einander zu vergleichen hätten. Aber den 9 mehrzähligen Geraden unserer linearen Construction stehen immer noch ebensoviele anderweitige Operationen gegenüber, nämlich 3 Messungen, 3 Operationen eventuell mit dem Rechenschieber und endlich 3 Manipulationen mit Zirkel und Massstab.

Wenn es sich dagegen um ein einziges Fehlerdreieck bei nur 3 gegebenen Bestimmungsgeraden handelt, so erfordert unsere Methode wenigstens 14 Hülfslinien (statt 16, sobald man nämlich zwei überzählige Parallelen fortlässt), und bei vollständiger Behandlung sogar 21. Nur in diesem Falle würden wir der Gauss'schen Construction den Vorzug geben.



P_c''
Γ_1''
Pollinie.
Fig. 1.
m^*
c_1
P
p
q
s
K_2
a_1
a_2
K_1
Q
G_2
Fig. 2.
G_1
g
S
A
Π_c'


Polllinie.
Fig. 1.
Fig. 2.

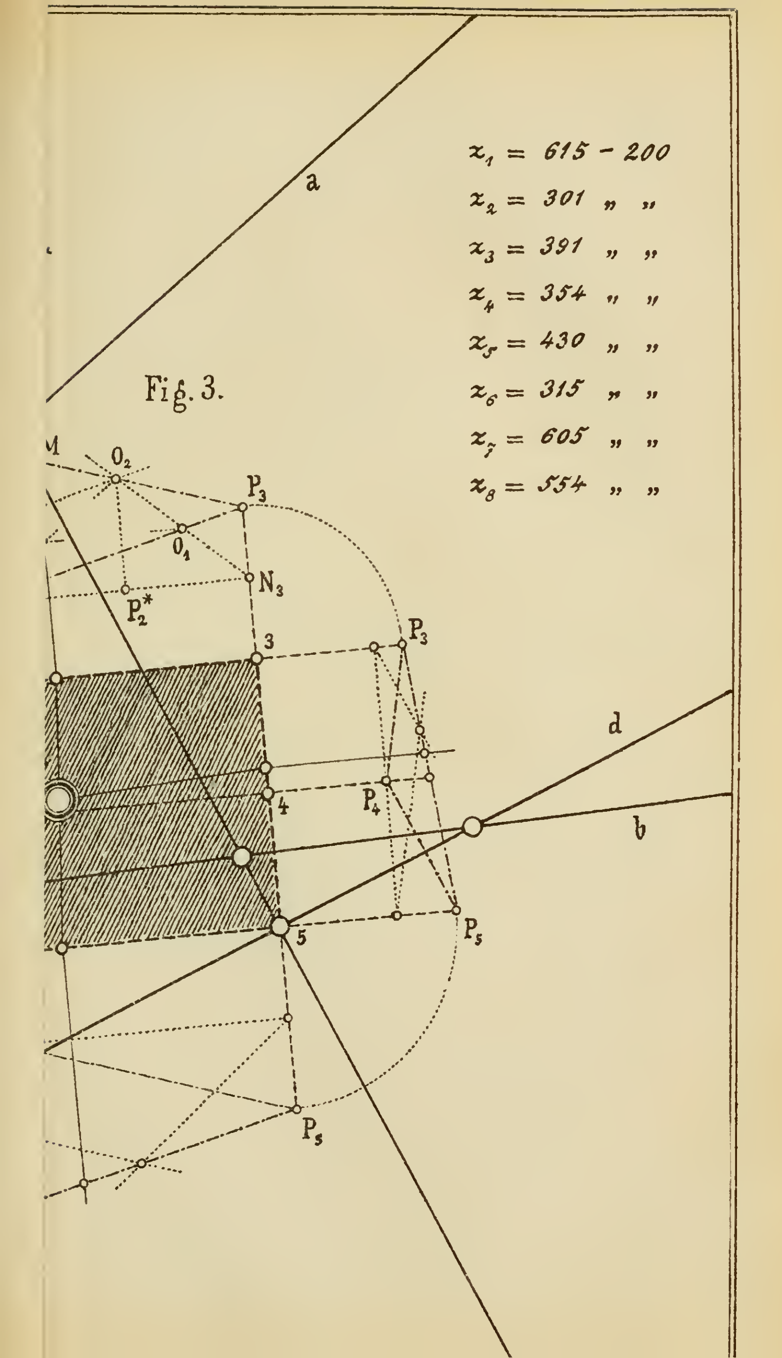
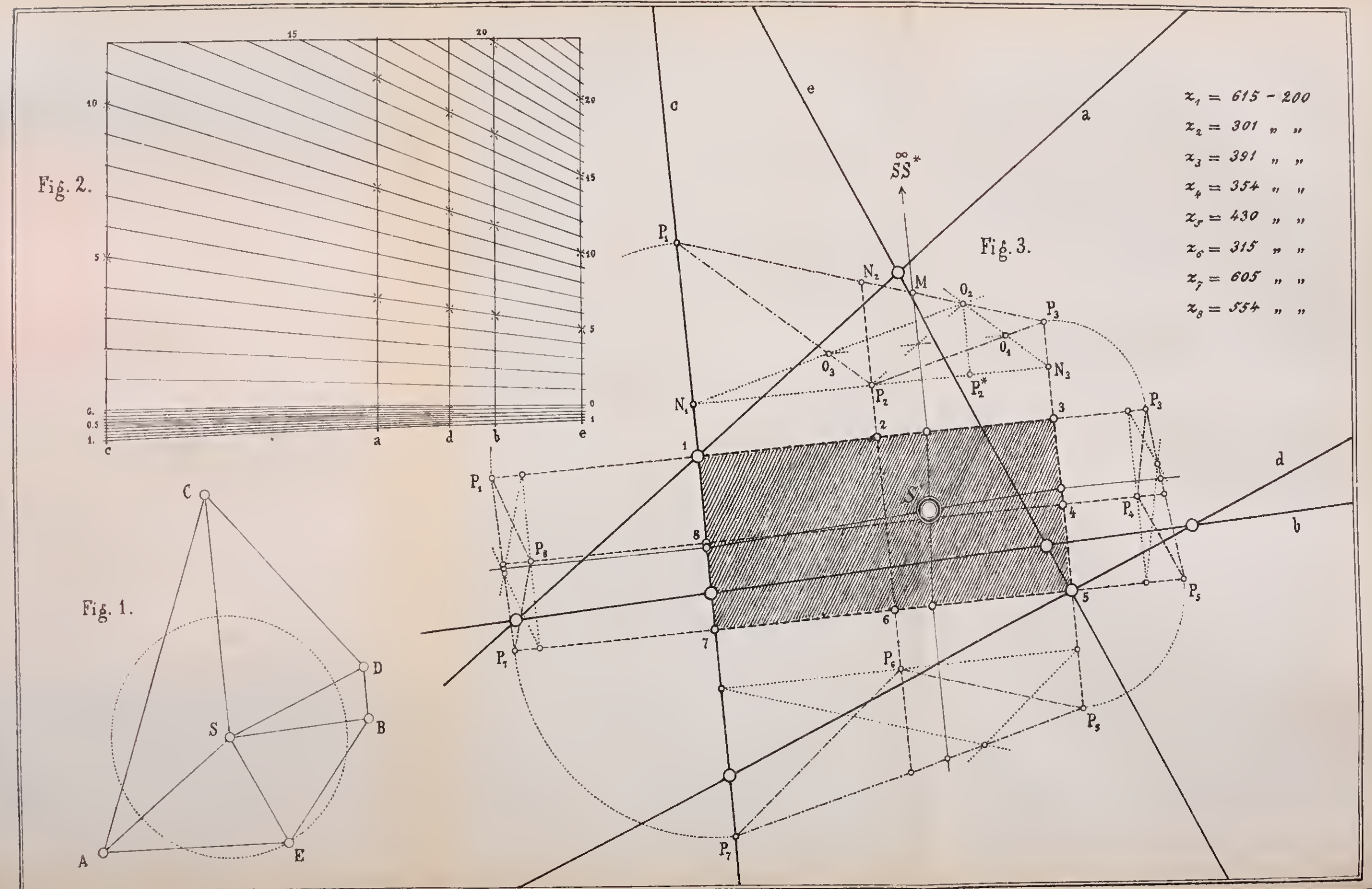
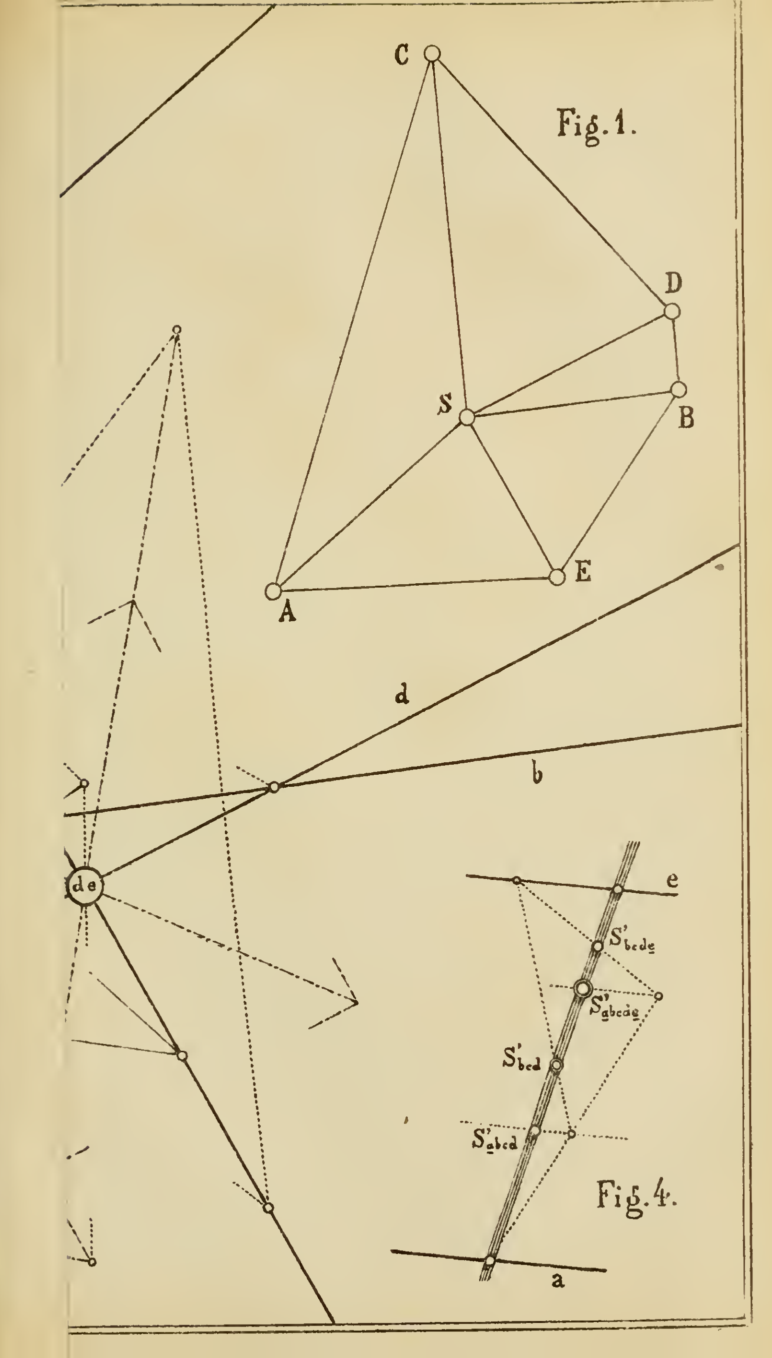
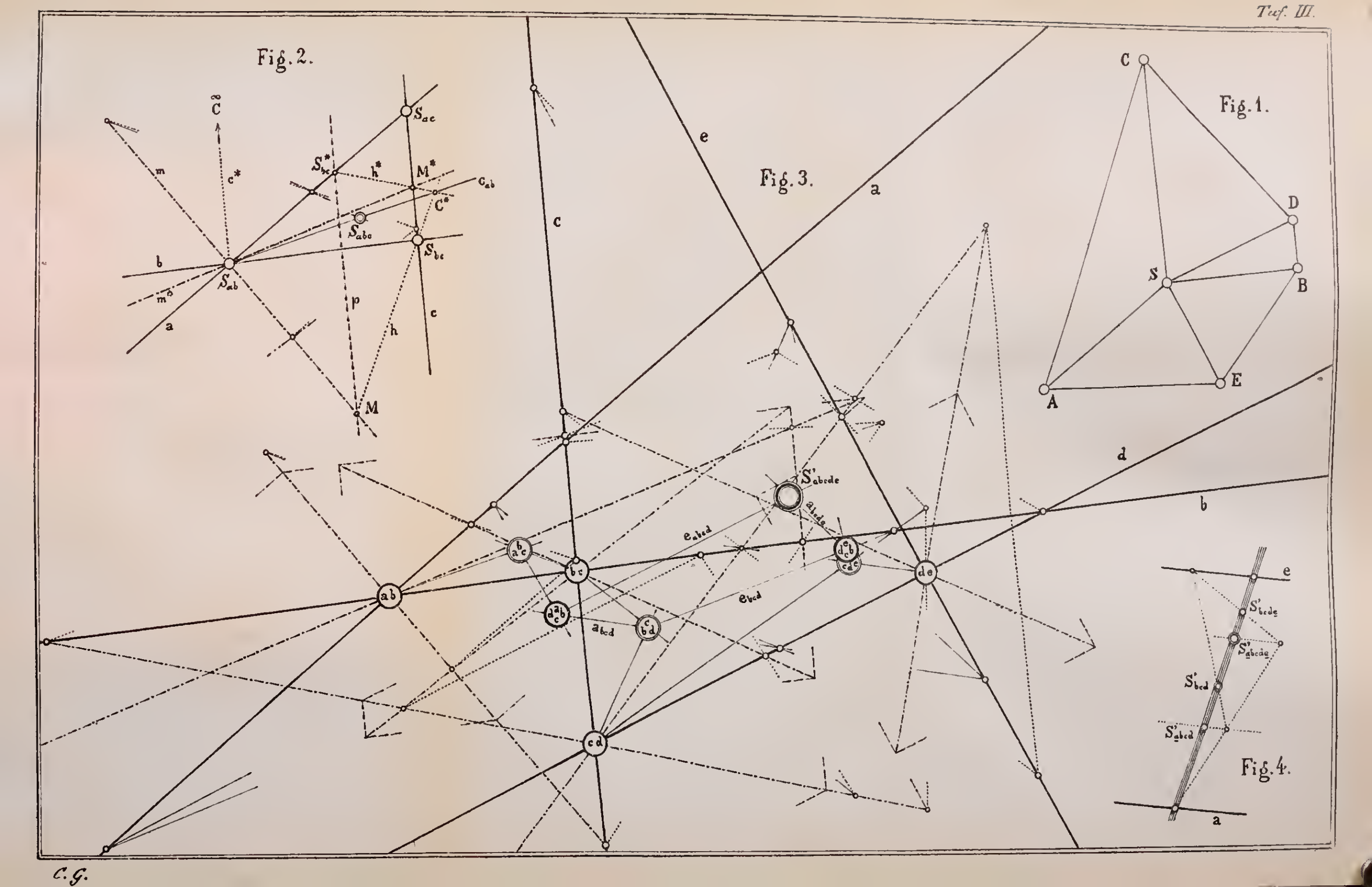


Fig. 3.
a
d
b
$x_1 = 615 - 200$
$x_2 = 301$ „ „
$x_3 = 391$ „ „
$x_4 = 354$ „ „
$x_5 = 430$ „ „
$x_6 = 315$ „ „
$x_7 = 605$ „ „
$x_8 = 554$ „ „
M
O_2
O_1
P_3
N_3
P_2^*
3
4
5
P_4
P_5


Fig. 2.
Fig. 1.
Fig. 3.
$x_1 = 615 - 200$
$x_2 = 301$ „ „
$x_3 = 391$ „ „
$x_4 = 354$ „ „
$x_5 = 430$ „ „
$x_6 = 315$ „ „
$x_7 = 605$ „ „
$x_8 = 554$ „ „


C
Fig. 1.
D
S
B
E
A
d
b
de
e
S'_{bcde}
S'_{abcde}
S'_{bcd}
S'_{abcd}
Fig. 4.
a


Fig. 2.
Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 4.
C
D
S
B
A
E
e
a
c
d
b
ab
bc
cd
de
S'_{abcde}
e_{abcd}
e_{bcd}
a_{bcd}
a_{bcde}
S_{ac}
S_{bc}^*
h^*
M^*
c_{ab}
C^*
S_{abc}
S_{bc}
S_{ab}
c^*
m
m^0
p
h
M
S'_{bcde}
S'_{bcd}
S'_{abcd}

C. G.

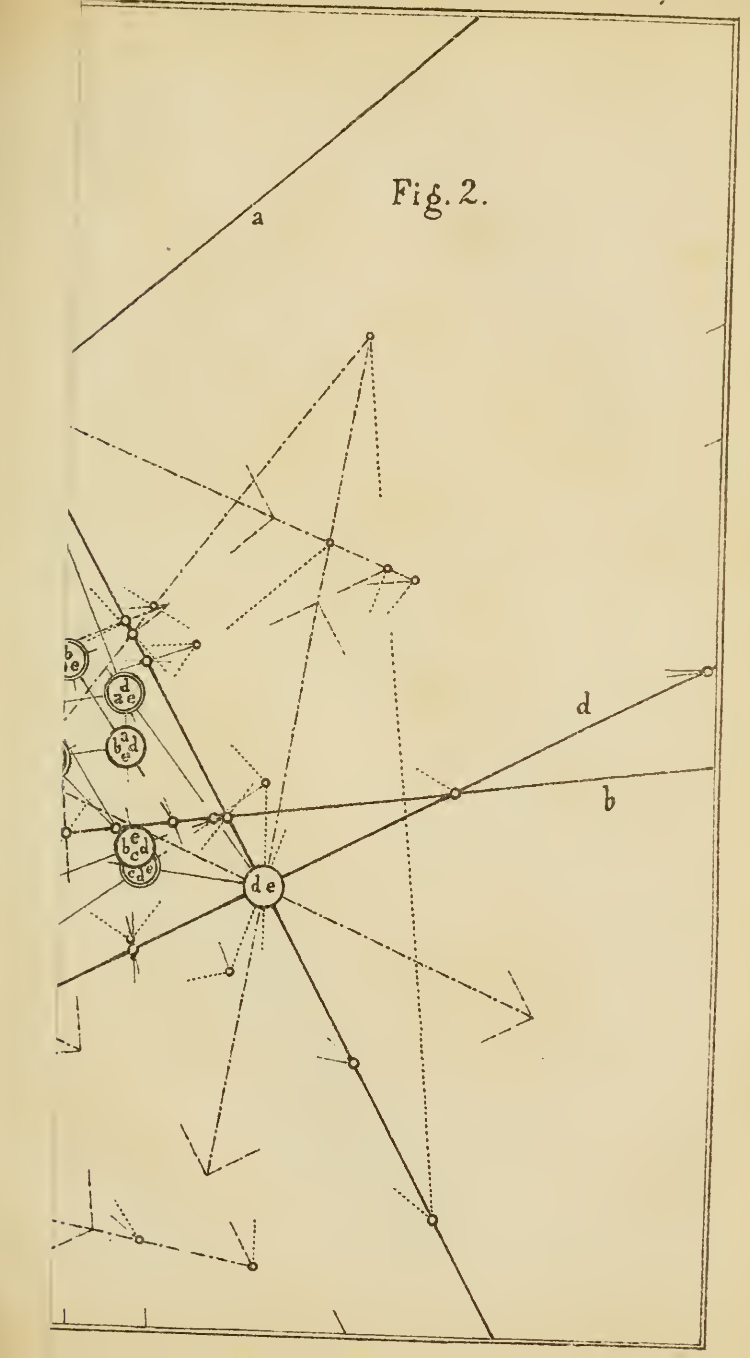

Fig. 2.
a
d
b
de
b e
d a e
b a e d
b e c d
c d e

Fig. 1.

Schema.

Fig. 2.

C. G.

Astronomische Mittheilungen

von

Dr. Rudolf Wolf.

LXVIII. Versuch einer Ehren-Rettung für Nicolaus Reymers; Fortsetzung der Sonnenflecken-Literatur; Fortsetzung des Verzeichnisses der Instrumente, Apparate und übrigen Sammlungen der Zürcher-Sternwarte.

In der Geschichte der Astronomie des sechszehnten Jahrhunderts wird bei Besprechung von Tycho Brahe in der Regel auch der Dithmarse Nicolaus Reymarus Ursus genannt, aber meist nur um ihn zu schmähen, oder ihn gar als ein eigentliches Scheusal darzustellen, und förmlich keinen »guten Faden« an ihm zu lassen. Ich glaube nun, dass diesem Manne schweres Unrecht geschehen ist, — dass man seine guten Eigenschaften und Leistungen übersehen, und ihm dagegen Verschuldungen, ja förmliche Verbrechen angedichtet hat, welche ihm gar nicht, oder wenigstens lange nicht in dem Maasse zufallen, in welchem sie ihm zugemessen worden sind, — und will diess im Folgenden durch eine kurze Darstellung seines Lebens und seiner Arbeiten zu begründen suchen. [1]) — Um die Mitte des sechszehnten Jahrhunderts zu Henstede in Norder-Dithmarschen in den ärmlichsten Verhältnissen zur Welt gekommen, musste sich Nicolaus Reymers als Knabe, ähnlich wie der wenig ältere und später als Papst Sixtus V. bewunderte Felice Peretti, seinen Lebensunterhalt als

---

[1]) Ich stütze mich dabey unter Anderm auf den Reymers betreffenden Artikel in „Mollerus, Cimbria literata. Havniæ 1744, 3 Vol. in fol. (I. 513—18)“.

Schweinehirt selbst zu verdienen suchen, — wusste sich aber nebenbei durch eisernen Fleiss und grosse Begabung als Autodidakt rasch schöne sprachliche und wissenschaftliche Kenntnisse zu erwerben, sowie die Protection des Landesstatthalters Heinrich Ranzow, welcher schon 1580 eine von seinem Schützlinge verfasste »Grammatica latina Ranzoviana« zum Drucke beförderte. Im Jahre 1582 hatte sich Reymers bereits zum »Landmesser« aufgeschwungen, und im folgenden Jahre zu Leipzig eine seinem Gönner gewidmete »Geodæsia Ranzoviana« aufgelegt, welche allerdings nur insofern Interesse hat, als sie zeigt, dass sich Reymers schon damals über das gewöhnliche Niveau s. Fachgenossen erhoben hatte. Etwas später trat Reymers in Dienste von Erich Lange auf Jütland, und besuchte mit ihm im Herbst 1584 dessen Freund Tycho Brahe, welcher jedoch seiner Wissbegierde und Freimüthigkeit mit Misstrauen und Stolz entgegentrat. [2]). Von Lange entlassen, brachte Reymers den Winter 1585/6 als Informator in Pommern zu, — setzte nebenbei s. Studien fort, welche sich damals zunächst auf Astronomie bezogen zu haben scheinen, — und kam dabei [3]) auf die Idee, in ähnlicher Weise, wie es schon die Egypter mit den untern Planeten gehalten hatten, die sämmtlichen Planeten um die Sonne, diese Letztere aber nebst dem Monde um die Erde circuliren zu lassen, sowie zugleich der Erde zur Erklärung der täglichen Bewegung eine Rotation um ihre

---

[2]) Durch dieses Misstrauen liess sich Tycho verleiten einen Schlafcameraden von Reymers zu veranlassen, Letzterm Nachts einmal s. Papiere zu entwenden, — sie sollen, abgesehen von einer Skizze der Tychonischen Gebäulichkeiten, in einigen Gedichten bestanden haben.

[3]) Ich folge hier vorläufig der Angabe von Reymers, — für weiteres auf unten verweisend.

Axe zu geben, so dass bloss diese Axe in Ruhe blieb. Im Frühjahr 1586 reiste Reymers nach Cassel, wo Landgraf Wilhelm sein eben erwähntes neues Weltsystem mit so grossem Interesse aufnahm, dass er Bürgi beauftragte dasselbe durch ein Modell darzustellen, — machte dort einen längern Aufenthalt, bei dem er vom Umgange mit dem eben so bescheidenen, als genialen Bürgi so grossen Gewinn hatte, dass er diesen Mann von dieser Zeit an immer als seinen Lehrer bezeichnete, — und wäre muthmasslich noch länger dort geblieben, wenn er sich nicht gegentheils mit dem arroganten und eifersüchtigen Rothmann alsbald arg verfeindet hätte. Reymers siedelte hierauf nach Strassburg über, theils um dort s. Studien noch zu vervollständigen, theils um sich, wie wir jetzt sagen würden, als »Privatdocent« zu versuchen [4], — und veröffentlichte daselbst sein »Fundamentum astronomicum. Argentorati 1588 in 4«, auf welches nunmehr specieller eingetreten werden soll: Dieses Hauptwerk von Reymers enthält, ausser einer drei Blätter füllenden »Epistola dedicatoria« an den Strassburger-Magistrat, 40 Blätter, auf welchen Text und Holzschnitte wechseln. Dabei ist es in die fünf Capitel: »1° De Logistica astronomica. — 2° De Extractione Canonis sinuum. — 3° De Doctrina Trian-

---

[4]) Seine Vorträge veranlassten Reymers unter Anderm eine kleine Schrift „Metamorphosis Logicæ. Argentorati 1589 in 8“ herauszugeben, in welcher er sich vorsetzte allen scholastischen Ballast wegzuwerfen, — und Director Billwiller, der nach meinem Wunsche von ihr Kenntniss nahm, gab über dieselbe das Urtheil ab: „Sie ist ein ganz leidlich gehaltenes Compendium der formalen Logik, wie solche in unserm Jahrhundert noch vielfach, aber nicht immer besser, erschienen sind.“ Ich füge bei, dass sich Reymers in s. Vorworte ganz bescheidentlich als „Mathematum Studiosus“ unterschrieb.

gulorum, — 4° De observatione locorum stellarum fixarum. — 5° De observatione motuum planetarum: ubi de novis nostris Hypothesibus,« abgetheilt. Die Behandlung ist etwas abstrus, hat aber die Eigenthümlichkeit, dass fast jedes der beigegebenen Diagramme einem zum Verfasser in irgend welcher Beziehung stehenden Gelehrten gewidmet ist, und so das kleine Buch, auch ganz abgesehen von seinem eigentlichen Inhalte, zu einer gar nicht zu verachtenden historischen Fundgrube wird, welcher ich selbst mehrere, für die Geschichte der Goniometrie und Trigonometrie gar nicht unwichtige Anhaltspunkte entnehmen konnte. [5]) Auf den zum Theil ganz interessanten

---

[5]) Ich glaube Freunden der Specialgeschichte der mathematischen Wissenschaften einen Dienst zu erweisen, wenn ich diese Diagramme sammt den Widmungen aufzähle, und die zur Erläuterung dieser Letztern von mir nicht ohne Mühe gesammelten Notizen beifüge: 1° „Diagramma Inscriptionis. D. D. Laurentio Tuppio sacrum.“ Tuppius (Greifswalde 1528 — Strassburg 1614) war Prof. jur. in Strassburg. Reymers nennt ihn in der Epist. dedic. als seinen Lehrer. — 2° „Diagramma Compendiorum. Cunrado Dasypodio, mei præceptoris filio sacratum.“ Für Conr. Dasypodius (Strassburg 1531 — ebend. 1600), den bekannten Prof. math., dem Strassburg seine berühmte Uhr verdankte, vergl. Bd. 3 meiner Biographien. Da er, wie mir Freund Winnecke zur Zeit ermittelte, keinen Sohn besass, und auch von Reymers in der Epist. dedic. nicht unter s. Lehrern aufgezählt wird, so ist anzunehmen, es habe Reymers den 1559 verstorbenen Vater Peter Dasypodius insofern als s. Lehrer bezeichnet, als er dessen zur Zeit sehr beliebte Schul- und Wörterbücher in frühern Jahren benutzt habe. — 3° „Diagramma sectionis anguli. Justo Byrgi præceptori, hujusque artificii repertori, gratitudinis ergo suspensum.“ Ueber Joost Bürgi, vom dem übrigens oben schon die Rede war, habe ich in diesen Mittheilungen bereits so viel gesprochen, dass es unnöthig scheint hier noch weiteres beizufügen. Sogar von gegenwärtigem Diagramm, das ich übrigens in meiner bereits redigirten Geschichte der Goniometrie und Trigonometrie noch ganz speciell behandle, ist bereits in Nr. 31 beiläufig die Rede gewesen. — 4° „Diagramma Quadrationis. Simoni

Inhalt dieses Buches trete ich hier, da Manches bereits in frühern Mittheilungen berührt worden ist und Anderes binnen Kurzem eine anderweitige Verwendung finden soll, nur insoweit ein, als dadurch das oben mitgetheilte neue Weltsystem unsers Reymers betroffen wird, d. h. auf das letzte Capitel, zu welchem bei einem vollständigen Exemplare noch ein grösseres, auf einem besondern Blatte dargestelltes Diagramm gehört, das die Aufschrift »Dia-

---

a Quercu, inventori huius Divini artificij consecratum". Der damals in Delft als Prof. math. lebende Simon „Von der Eyck" oder Quercetanus hat bekanntlich das Verdienst in Holland die Arbeiten über die Quadratur des Kreises in Fluss gebracht zu haben. — 5°„ Diagramma Demonstrationis prius. Davidi Wolkenstenio commensali dedicatum." David Wolkenstein (Breslau 1534 — Strassburg 1592) wurde von Dasypodius zur Hülfe bei Construction der Uhr zugezogen, und sodann auf s. Wunsch neben ihm als Prof. math., zugleich aber auch als Musikdirector angestellt. Reymers nennt ihn in der Epist. dedic. als s. Lehrer, scheint ihm die Erlaubniss, in Strassburg lehren zu dürfen, verdankt zu haben, und s. Tischgenosse gewesen zu sein. — 6° „Diagramma Demonstrationis posterius. D. D. Thomæ Finckio populari oblatum." Thomas Finck (Flensburg 1561 — Kopenhagen 1656), der damals Leibarzt des Herzogs von Schleswig-Holstein, später Prof. math. et med. in Kopenhagen, und ein halber Landsmann von Reymers war, dürfte sich früher ebenfalls einige Zeit in Strassburg und Umgebung aufgehalten haben, da s. „Ephemeris coelestium motuum" (mit welcher die von Zedler „Wolkenstein" zugeschriebene „Explicatio Ephemeridum Argentinensium" zusammenhängen dürfte) 1581 zu Strassburg, s. „Horoscopographia" 1583 ebendaselbst, und seine bekannte „Geometria rotundi" 1583 zu Basel erschien. — 7° „Diagramma casus prioris. Paulo Wittichio Vratislaviensi dedicatum." Für Paul Wittich (1560?—1587) und die Bedeutung dieses, sowie des nächstfolgenden Diagrammes für die Geschichte der Prostapharesis verweise ich auf meine Mitth. 32 und meine „Beiträge" in Bd. 15 u. 17 der Viert. d. astron. Ges. — 8° „Diagramma posterioris casus prostaphareseos. Bartolemæ Sculteto senatori Gorlicensi sacrum." Bartol. Scultetus (Görlitz 1540 — ebend. 1614) war Mitschüler von Tycho in Leipzig, später Lehrer und Bürgermeister zu Görlitz. —

gramma Systematis Naturæ, repræsentans Hypotheses Motuum Corporum Mundanorum, Illustrissimo Principi Hassiæ, etc., Guilielmo, obsequii observantiæque ergo dedicatum consecratumque per Nicolaum Raymarum Ursum Dithmarsum« besitzt. In diesem Diagramme sind von der Erde aus als Centrum drei Kreise der Radien 9,33 und 136 ^{mm} beschrieben, deren erster dem Monde, der zweite der Sonne zusteht, während der dritte die Fixsternsphäre darstellt

---

9° „Sequuntur Diagrammata Rectangulorum. Gerardo Mercatori cum filius et nepoti dedicatum". Ueber die Mercator dürfte höchstens beizufügen sein, dass Rumold Mercator, der jüngste Sohn Gerhard's, einige Zeit in Diensten Landgraf Wilhelm's gestanden zu haben scheint. — **10°** „Diagramma, Alberto Leonino à Gronewoude sacrum". Diesen Leoninus habe ich sonst nirgends erwähnt gefunden. — **11°** „Diagramma usitati primi, eiusdemque casus prioris. Lazaro Schonero sacratum." Ein Lazarus Schoner, wahrscheinlich ein Nachkomme der bekannten Schoner in Nürnberg, wird 1619 von Graffenried in s. „Arithmetica logistica" als arithmetischer Schriftsteller erwähnt, und in der That finde ich bei Murhard: „Petri Rami Arithmetices et libri duo, Algebræ totidem: a Lazare Schonero emendati et explicati. Ejusdem Schoneri libri duo: alter de numeris figuratis, alter de Logistica sexagenaria. Francofurti 1586 in 8". — **12°** „Diagramma casus posterioris usitati primi. Edoni Hilderico Frisio consecratum." Edo Hildericus (Jever in Ostfriesland 1533 bis Altorf 1599) war erst Prof. math. in Jena, etc., damals bereits Prof. theol. in Altorf. — **13°** „Diagramma usitati secundi, eiusdemque casus prioris. Philippo Apiano Petri filio dedicatum." Philipp Apian ist zu bekannt, um etwas über ihn beifügen zu müssen. — **14°** „Diagramma casus posterioris usitati secundi. M. Michaeli Mæstlino suspensum." Auch über Mich. Mæstlin ist nichts beizufügen nöthig. — **15°** „Diagrammata Continuationis. Valentino Ottoni dedicata." So bekannt Valentin Otho als Schüler von Rhaeticus und Herausgeber des „Opus Palatinum" ist, so wenig hat sich über s. Lebensumstände erhalten. Man weiss bloss, dass er von Magdeburg gebürtig, und später Mathematicus des Kurfürsten Friedrich IV. von der Pfalz war. — **16°** „Diagramma Astronomicæ sectionis anguli. D. D. Henrico Brucæo Dedicatum". Heinrich Brucæus war etwa 1531 zu Alost in Flandern geboren, stand erst als Prof. math. in

und in die 12 Zeichen abgetheilt ist; sodann sind von der Sonne aus, die in 9° ♌ angenommen ist, noch fünf Kreise mit den Radien 15, 19, 68, 82 und 96 mm beschrieben, welche der Reihe nach die Bahnen von Merkur, Venus,

---

Rom, später als Arzt und Prof. math. et med. in Rostock, wo er 1593 starb. — **17°** „Diagramma ultimi Obliquanguli. Christophoro Clavio Bambergensi donatum". Ueber Christoph Clavius ist kaum etwas beizufügen nothwendig. — **18°** „Diagramma Rectangulorum planorum. Matthæo Badero Rectori scholæ Francofurtanæ consecratum." Mathæus Bader soll 1593 eine Rhetorik herausgegeben haben; sonst habe ich nichts über ihn finden können. — **19°** „Diagrammata Johanni Jungen Archigrammatæo Schwednitiensi, summo Arithmetico donata". Ohne Zweifel derselbe Johannes Junge von Schweidnitz in Schlesien, von welchem Reymers in seiner spätern „Arithmetica" eine die Auflösung der Gleichungen betreffende Erfindung vom Jahre 1577 anführt; weiteres habe ich nicht über ihn finden können. — **20°** „Diagramma investigandæ latitudinis et longitudinis, eiusque Declaratio. Victorino Schonfelt Budissino immolatum." Victor Schönfeld (Bautzen 1525 — Marburg 1591) war Prof. math. in Marburg. — **21°** „Diagramma reciprocæ observationis, eiusque Explicatio. D. D. Casparo Pencero Budissino devotum." Caspar Peucer (Bautzen 1525 — Dessau 1602) war Melanchthon's Schwiegersohn und Prof. math. et med. in Wittenberg; A. 1574 wurde er, als des Krypto-Calvinismus verdächtig, abgesetzt und bis 1586 in strenger Haft gehalten; zuletzt stand er als fürstl. Leibarzt in Zerbst und Dessau. — **22°** „Diagramma rotularum motricum. Joanni Dee Anglo dedicatum". John Dee (London 1527 bis Mortlake in Surrey 1607), ein Mathematiker, Astrolog und Alchemist, der einige Zeit in Prag lebte, wo er bei Rudolf II in hohem Ansehen stand, und später Pensionär der Königin Elisabeth war. — Ich schliesse diese lange Aufzählung mit der Bemerkung, dass ich nur bedauern kann, dass das Verfahren von Reymers nicht auch von Andern nachgeahmt, und so dem Geschichtschreiber aus einer Zeit, wo die jetzt allgemein üblichen Noten und Citate noch nicht gebräuchlich waren, mancher werthvolle Anhaltspunkt erhalten wurde. Die etwas hämische Bemerkung von Kästner (I. 631), es sei das „eine bequeme Art vielen Leuten Complimente zu machen", kann ich nicht billigen, und gerade von ihm am allerwenigsten begreifen.

Mars, Jupiter und Saturn darstellen. Der Text ist entsprechend diesem Diagramme und dem bereits oben Gesagten abgefasst, und es genügt die in demselben aufgestellten Thesen 12, 15 und 16 noch etwas specieller ins Auge zu fassen. Am wichtigsten ist der Schluss der 12. These, welcher, nach Uebersetzung von Director Billwiller, wie folgt lautet: »Die Erde ist in Bezug auf die Ortsveränderung unbeweglich, in Bezug auf die tägliche Rotation oder die tägliche und nächtliche Umwendung durchaus beweglich; täglich nämlich rotirt sie, indem sie Tags und Nachts herumgetrieben wird, im Zeitraum eines Tages und einer Nacht, d. h. in 24 Stunden, einmal; durch diese Umwendung wird sie der Sonne wieder zugewandt, und markirt dadurch den natürlichen Tag, welchen man Nychthemeron nennt.« In der 15. These kommt er dann nochmals auf diese Bewegung zurück, indem er sagt, es gebe 8 bewegliche Weltkörper, nämlich die 7 Wandelsterne und die Erde »quæ quidem eundem semper suum obtinet locum, sed non eundem semper, respectu coeli seu stellarum fixarum, situm.« Und in der 16. These spricht er noch einmal speciell aus, dass die Fixsterne unbeweglich seien, so dass es also keinem Zweifel unterworfen ist, dass Reymers spätestens 1588 nicht nur die Bewegung der Planeten um die Sonne, und die Bewegung von Sonne und Mond um die Erde lehrte, sondern auch die tägliche Bewegung durch eine tägliche Umdrehung der Erde um eine Axe erklärte. — In dem Zeitraume, der zwischen den Aufenthalt von Reymers in Cassel und das Erscheinen s. Werkes fiel, nämlich in einem 1587 I 20 von Tycho an Rothmann geschriebenen Briefe, finden sich einige Andeutungen, dass Tycho eine neue Hypothese über das Weltsystem aufgestellt habe,

und in einem demnächst erscheinenden Werke behandeln werde, — und in einem spätern, zur Zeit des Sommersolstitiums 1588 geschriebenen Briefe, welchen Tycho einem für Rothmann bestimmten Exemplare seiner Schrift »De mundi ætherii« beilegte,[6]) sagte er mit Bezug darauf: Du findest dort im Anfange des 8ten Capitels auch eine von mir noch nicht gar lange (non ita dudum) erfundene Hypothese für die Bewegung der Himmelskörper, welche, wie ich nicht zweifle, richtiger als jene alte ptolemæische und die neue copernicanische ist, und mit den Erscheinungen sehr gut übereinstimmt«. Und in der That besprach nicht nur Tycho in jener Schrift seine neue, in Beziehung auf Sonne und Planeten mit derjenigen von Reymers ganz übereinstimmende Hypothese, sondern gab auch unter der Aufschrift »Nova mundani Systematis Hypotyposis ab Authore nuper adinventa, qua tum vetus illa Ptolemaica redundantia et inconcinnatis, tum etiam recens Coperniana in motu Terræ Physica absurditas, excluduntur, omniaque, Apparentiis Cœlestibius aptissime correspondent«, eine graphische Darstellung s. Systems, aus der man auf den ersten Blick die Uebereinstimmung desselben mit dem Reymers'schen Systeme ersieht, indem sich die beiden Diagramme, abgesehen von Kleinigkeiten,[7]) fast

[6]) In den Handel kam dieses Buch erst 1603 mit einem von Tycho's Tochtermanne Tengnagel 1603 „quinto Non: Februarij" gezeichneten Vorworte, ja man liest auf dem Titel „Typis inchoatus Uraniburgi Daniæ, absolutus Pragæ Bohemiae CIↃ DC III"; aber es scheint also, dass der Druck 1588 doch schon so weit vorgerückt war, dass Tycho einzelne Exemplare an Freunde versenden konnte.

[7]) Namentlich besitzt bei Tycho der die Fixsternsphäre darstellende Kreis keine Eintheilung. Ferner greift bei ihm der Marskreis (wegen $30 < 2 \times 18$) in den Sonnenkreis ein, bei Reymers (wegen $68 > 2 \times 33$) dagegen nicht, was Tycho gegenüber Reymers besonders geltend macht.

nur durch ihren Maassstab unterscheiden, da Tycho die Radien 5, 18, 67 und 6, 9, 30, 39, 48 ^{mm}, also durchschnittlich die Hälfte derjenigen bei Reymers, hat. Rothmann, unter dessen wenigen guten Eigenschaften die vornehmste die war, dass er sich entschieden zum Copernicanischen Systeme bekannte, nahm natürlich das neue System kühl auf, erhob in s. Antwort vom 19. Sept. 1588 mehrere Bedenken gegen dasselbe, und fügte (ohne Reymers zu nennen) namentlich auch bei, dass dasselbe nicht einmal wirklich neu sei, indem der Landgraf schon vor einem Jahre ein Modell eines ähnlichen Systems habe ausführen lassen. Diese abschätzige Antwort reizte Tycho begreiflich, und als er bald darauf auch noch Kenntniss von dem »Fundamentum astronomicum« erhielt, ging der Sturm los: Nachdem er in einem 1589 II 21 an Rothmann geschriebenen Briefe sich des Weiten und Breiten über die Vorzüge s. Systemes, und speciell auch gegen die Rotation der Erde, ausgesprochen, stellte er die bestimmte Behauptung auf, er habe das neue System schon 1582 ausgedacht und dargestellt, und es sei ihm dann 1584 seine Zeichnung durch Reymers, welchen Rothmann ja schon 1586 als »unsaubern Schuft« bezeichnet habe, [8]) entwendet und in Cassel als eigene Arbeit vorgelegt worden. — Im ersten Augenblicke erscheint diese Anklage für Reymers erdrückend, aber bei genauerer Betrachtung verliert sie bedeutend an Gewicht: Für's Erste wider-

---

[8]) Rothmann hatte nämlich in einem 1586 VIII 26 an Tycho geschriebenen Briefe, aber ohne Begründung, „de impuro illo nebulone Nicolao Raymaro Urso Dithmarso" gesprochen, was wohl am Besten in obiger Weise verdeutscht wird. Friis übersetzt „Urene Slyngel", — andere wählen „Liederlicher Schelm", — aber Alle fassen somit jene Bezeichnung als arge Beschimpfung auf.

spricht sich Tycho selbst, wenn er im Sommer 1588 schreibt, dass er seine Hypothese »noch gar nicht lange« erfunden habe, und dann ein halbes Jahr später plötzlich behauptet, er habe sie schon vor vollen sieben Jahren aufgestellt und es sei ihm schon vor fünf Jahren eine Darstellung derselben entwendet worden; sodann ist höchst unwahrscheinlich, dass der äusserst mistrauische Mann eine solche Zeichnung, wenn er sie damals wirklich schon besessen und Werth darauf gelegt hätte, sie nur so herumliegen liess, so dass sie der erste beste Besucher seiner Sternwarte einstecken konnte; und endlich besass offenbar Tycho für eine Entwendung durch Reymers keinen Beweis, sonst würde er ihn beigebracht und sich nicht statt dessen auf Rothmann's Urtheil über Reymers, dessen Berechtigung er keineswegs kannte, bezogen haben. Reymers mag ein »ungeleckter Bär« gewesen sein, und sich den Namen »Ursus Dithmarsus« nicht umsonst beigelegt haben; aber bei einem solchen findet man weniger Neigung zu einer schlechten Handlung als bei einem »geleckten Frömmler« zu lieblosem Urtheil, — ja ich halte Reymers einer solchen gar nicht für fähig, sondern bin gegentheils überzeugt, dass derselbe, wenn ihn Tycho bei s. Besuche auf der Uranienburg auch nur halbwegs anständig behandelt, geschweige in s. Geheimnisse eingeweiht hätte, dieses offen anerkannt und keine Gelegenheit versäumt haben würde, sich ihm dankbar zu erzeigen, wie er es ja gegenüber Allen hielt, welchen er sich irgendwie zu Dank verpflichtet fühlte. Ich will den Spiess nicht umkehren, sonst könnte ich ganz gut behaupten, es sei höchst verdächtig, dass Tycho vor dem Frühjahr 1586, wo Reymers s. Vorlage in Cassel machte und der von Tycho dahin abgesandte Peter Flemloose muthmasslich

noch daselbst anwesend war [9]), kein Wort über ein von ihm erfundenes neues System verlor, — sondern ich glaube, dass sich der ganze Handel am natürlichsten, und ohne einer der beiden Partheien zu nahe zu treten müssen, in folgender Weise erklären lässt: Als Reymers 1584 auf der Uranienburg war, lagen in der dortigen Luft verschiedene Bedenken gegen das Copernicanische System, welche sich auch ihm mittheilten, und es mag damals schon beiläufig davon die Rede gewesen sein, dass man ihnen vielleicht, ohne zum ptolemäischen Systeme zurückzukehren, durch Ausdehnung des egyptischen Systemes auf alle Planeten begegnen könnte, ohne dass dieses jedoch bereits in bestimmterer Weise formulirt worden wäre. [10]) Später bildete sich sodann dieser Gedanke sowohl bei Tycho als bei Reymers weiter aus, und es entstanden so nahe gleichzeitig und unabhängig von einander ihre beiden Systeme, welche sich somit in Beziehung auf die Planeten nicht wesentlich, und nur in Hinsicht auf die Erklärung der täglichen Bewegung von einander unterscheiden konnten, wie diess auch wirklich der Fall war, indem Tycho hartnäckig die Rotation der Erde verwarf, während Reymers dieselbe annahm. Es wird diese Annahme wohl Niemand dem Letztern zum Vorwurfe machen wollen, sondern man wird wohl eher zugeben müssen, dass in dieser grundsätzlichen Abweichung

---

[9]) Vergl. meine schon in Note 5 citirten „Beiträge".

[10]) Ich will damit nicht entscheiden, ob damals eine Skizze gemacht worden sei oder nicht; aber wenn auch Ersteres der Fall gewesen wäre, und Reymers (was übrigens, wie schon gesagt, durchaus nicht erwiesen, sondern durch die in Note 2 erwähnte nette Geschichte eher widerlegt ist) sich eine solche angeeignet hätte, so wäre diess nicht gerade delicat gewesen, aber würde dann doch nicht hinreichen ihn zum Diebe zu stempeln.

der beiden Systeme ein Beweis für die Selbständigkeit derselben liege. — Ohne von diesem Angriffe etwas zu ahnen, folgte Reymers etwa zu Anfang der 90er Jahre einem Rufe nach Prag, [11]) wo er nun längere Zeit unangefochten als kais. Mathematicus lebte, mit Erfolg mathematische und astronomische Vorlesungen hielt, [12]) auch mit dem als Mäcen der Gelehrten bekannten Kanzler Jakob Curtius sehr gut stand, so dass er bei dessen Tod eine »Parentatio. Pragæ 1594 in 4« ausgehen liess. Als dann aber Tycho 1596 s. Briefwechsel mit Wilhelm und Rothmann publicirte, und dabei alle die anstössigen Bezeichnungen und Anschuldigungen mitabdrucken liess, überlief Reymers, der in seiner frühern Schrift Rothmann und Tycho einfach ignorirt hatte, begreiflicherweise die Galle, und er kehrte nun allerdings den »Ursus« ganz und voll heraus, ja fiel in einer zweiten, dem Landgrafen Moritz gewidmeten Schrift »De astronomicis hypothesibus. Pragæ 1597 in 4« mit einer sogar für damalige Zeit unerhörten Grobheit über dieselben her, [13]) wodurch er hinwiederum

---

[11]) Wie derselbe veranlasst wurde, — ob durch den damals viel mit Prag verkehrenden Landgrafen Wilhelm, oder am Ende, wenn er erst 1592 erfolgte, durch Bürgi, der damals dem Kaiser eine seiner Arbeiten zu überbringen hatte, — weiss ich nicht.

[12]) Wahrscheinlich hängt die posthum erschienene, von Kästner (II 716) besprochene Schrift „Nicol. Raimari Arithmetica analytica, vulgo Cosa. Franckfurt a./O. 1601 in 4" mit diesen Vorlesungen zusammen.

[13]) Dass sich z. B. Reymers über die Nase von Tycho lustig machte, war in der That nicht sehr fein, und ebenso, dass er statt Rothmann beständig „Rotzmann" schrieb; aber die bereits (Note 8) mitgetheilte Bezeichnung, die Letzterer für ihn brauchte, war nicht besser, — und dass Tycho in s. Briefen ihn fast ausschliesslich als „Dithmarsisches Vieh" bezeichnete, war eben so grob. Wenn ferner Tycho von Reymers sagte, er habe eine „berüchtigte Hure" geheirathet, beifügend „gleich und gleich gesellt sich gern", so

diese so tödtlich beleidigte, dass ihm Tycho den Untergang schwur, — und wenn man die Gewaltthätigkeit dieses Letztern, sowie seine damalige Machtstellung in Betracht zieht, so braucht man es nicht als Folge schlechten Gewissens anzusehen, dass Reymers, als Tycho nach Ostern 1599 in Prag einzog, für gut fand sich auf einige Zeit zu absentiren, — ja er hätte vielleicht besser gethan noch länger wegzubleiben, denn es ist nicht erwiesen, dass sein 1600 VIII 15 eingetretener Tod auf natürlichem Wege erfolgte. [14]) Dass die erwähnte Schrift von Reymers unter grober Form und neben gemeinem Klatsch, der übrigens auf der andern Seite auch nicht gespart wurde, [15]) viel Wahres und Werthvolles enthält,

---

war es nicht feiner als wenn Reymers von wüsten Krankheiten Rothmann's sprach, — und stand Tycho um so weniger an, als aus der auf Actenstudium beruhenden Schrift „Jos. v. Hasner: Tycho Brahe und J. Kepler in Prag. Prag 1872 in 8" hervorgeht, dass im Hause von Tycho „ein wüstes Treiben" statt hatte, und dass z. B. seine Tochter Elisabeth, welche sich im Juni 1601 mit Tengnagel verheirathet hatte, schon am 28. Sept. desselben Jahres in die Wochen kam.

[14]) Das Todesdatum von Reymers gibt Snellius (Eratost batav. p. 229), der kurz zuvor in Prag war. — Georg Rollenhagen, welcher in dem ganzen Handel eine etwas curiose Rolle spielte, sprach 1602 II 22 in einem Briefe an Kepler aus, es möchte Tycho „per Ursianum quoddam venenum" gestorben sein, was sodann dahin ausgelegt wurde, es habe Reymers seinem Feinde wirklich Gift beigebracht. Ich glaube nun weder an solche Schauergeschichte noch daran, dass Tycho seine Drohung zur Ausführung gebracht habe; aber immerhin ist festzuhalten, dass wenn von Zweien der Eine an Gift stirbt, das ihm der Andere beigebracht hat, in der Regel der Ueberlebende der Mörder ist.

[15]) Die Panegyristen von Tycho finden natürlich, dass für ihn und seinen saubern Freund Rothmann nicht die gleiche Elle wie für Reymers anzuwenden sei, und hiemit kann ich mich einverstanden erklären: Dem aus den untersten Schichten des Volkes

ist von Unbefangenen stets anerkannt worden, und wird auch durch die Abneigung von Kepler, die ihm durch Tycho octroyirte »Apologia Tychonis contra Nicolaum Raymarum Ursum« abzufassen, belegt. Glücklicher Weise wurde letzteres Machwerk, nachdem 1601 X 24 auch noch Tycho gestorben war, gegenstandlos, und ich kann kaum begreifen, dass Frisch es angemessen fand im ersten Bande seiner sonst so verdienten »Opera Kepleri« nicht nur dasselbe, sondern sogar den ganzen Quark der sehr fraglichen und einseitig aus Tychonischen Quellen stammenden sog. Belege abdrucken zu lassen, und dafür viel wichtigeres Material, wie z. B. die Bürgi'sche Arithmetica, kaum zu besprechen, anstatt, wie es ganz angezeigt und höchlichst verdient gewesen wäre, Letztere zum Abdrucke zu bringen.

Ich breche hier ab, es dem Leser überlassend zu entscheiden, ob ihm mein Versuch einer Ehrenrettung für den armen Reymers gelungen erscheint, und gebe noch eine Fortsetzung meiner, in der vorigen Nummer wegen Platzmangel abgebrochenen Sonnenflecken-Literatur:

532) Magnetische Variationsbestimmungen in Wien. Aus dem Anzeiger der k. k. Academie ausgezogen. (Forts. zu 519.)

Auf der hohen Warte bei Wien wurden folgende mittlere monatliche Stände der Declinationsnadel über 9° erhalten:

---

stammenden, fast mit dem Vieh aufgewachsenen Reymers kann man manche Ausschreitungen verzeihen, welche sich weder der in den vornehmsten Kreisen einheimische und sich als Fürst fühlende Tycho, noch der classisch gebildete und sich in seine christlichen Tugenden hüllende Rothmann erlauben durfte, — zumal schon zu einer Zeit, wo Reymers noch kein verletzendes Wort an sie gerichtet hatte.

1885	7h	2h	9h	Variationen 1885	Zuwachs
I	31′,87	34′,95	30′,98	3′,52	—0′,79
II	31 ,75	35 ,56	31 ,37	4 ,00	—1 ,60
III	31 ,13	37 ,64	31 ,97	6 ,51	—2 ,00
IV	29 ,97	39 ,13	32 ,05	9 ,16	—2 ,55
V	27 ,12	38 ,13	30 ,44	11 ,01	1 ,30
VI	26 ,25	38 ,64	31 ,76	12 ,39	0 ,71
VII	26 ,35	37 ,87	31 ,29	11 ,52	1 ,65
VIII	25 ,86	36 ,19	30 ,02	10 ,33	0 ,85
IX	27 ,80	35 ,49	28 ,02	7 ,69	—1 ,13
X	28 ,77	34 ,47	30 ,33	5 ,70	—1 ,17
XI	29 ,23	32 ,65	27 ,88	4 ,10	0 ,34
XII	29 ,84	31 ,84	28 ,55	2 ,64	—0 ,31
Mittel	9° 31′,70			7′,38	—0′,39

Die in der ersten Variations-Columne enthaltenen Werthe sind von mir nach der Formel

$$v = 2^h - \frac{7^h + \text{Min.}}{2}$$

berechnet, — die in der zweiten geben die Zunahme gegen die entsprechenden Werthe von 1884.

533) Beobachtungen der Sonnenflecken in Athen. — Schriftliche Mittheilungen von Herrn Director Kokides. (Forts. zu 515.)

Herr Observator Alexander Wourlisch hat in Fortsetzung seiner Beobachtungen folgende Zählungen erhalten:

1885			1885			1885			1885			1885		
I	1	1.1	I	14	1.1	I	24	3.8	II	4	4.14	II	17	5.18
–	2	1.1	–	15	2.3	–	25	3.5	–	5	2.4	–	18	5.16
–	3	3.4	–	16	3.5	–	28	4.9	–	7	2.2	–	19	6.17
–	4	3.5	–	17	1.4	–	29	3.5	–	8	2.9	–	20	7.20
–	5	3.6	–	18	2.5	–	30	3.8	–	9	2.2	–	21	6.14
–	6	2.2	–	19	2 12	–	31	3.8	–	10	4.12	–	22	6.16
–	7	2.2	–	20	2.14	II	1	3.9	–	14	3.7	–	23	4.12
–	9	1.1	–	21	2.11	–	2	3.8	–	15	4.10	–	25	2.6
–	12	1.2	–	23	3.5	–	3	4.12	–	16	5.17	–	26	1.1

1885			1885			1885			1885			1885		
II	27	1.2	IV	19	1.2	VI	7	2.8	VII	24	4.10	IX	9	3.8
–	28	2.7	–	21	1.1	–	8	2.7	–	25	3.6	–	10	2.5
III	1	2.13	–	22	4.8	–	9	2.13	–	26	3.8	–	11	2.6
–	2	2.11	–	23	4.9	–	10	3.15	–	27	4.10	–	12	2.5
–	4	3.26	–	24	4.9	–	11	2.12	–	28	4.14	–	13	2.4
–	5	3.24	–	25	3.5	–	12	3.13	–	29	4.9	–	14	2.4
–	6	4.27	–	26	4.7	–	13	2.—	–	30	4.9	–	15	1.2
–	7	4.18	–	27	4.12	–	14	4.10	–	31	3.7	–	16	2.4
–	8	3.11	–	28	5.14	–	15	5.13	VIII	1	2.6	–	17	2.5
–	9	4.14	–	29	5.12	–	16	5.16	–	2	2.6	–	18	1.3
–	10	3.10	–	30	5.13	–	17	6.18	–	3	2.5	–	19	1.3
–	11	2.6	V	1	5.14	–	18	6.19	–	4	2.3	–	20	1.2
–	12	3.6	–	2	5.15	–	19	4.22	–	5	3.7	–	21	0.0
–	13	2.2	–	3	5.14	–	20	3.18	–	6	3.8	–	22	3.6
–	15	2.6	–	4	5.9	–	21	3.17	–	7	3.8	–	23	2.3
–	16	3.5	–	5	5.10	–	22	3.15	–	8	3.9	–	24	2.3
–	17	1.4	–	7	6.17	–	23	4.16	–	9	4.21	–	25	2.4
–	18	1.3	–	8	7.18	–	24	4.18	–	10	4.17	–	26	5.8
–	19	1.1	–	9	6.16	–	25	3.6	–	11	4.12	–	27	4.9
–	20	1.1	–	10	6.15	–	26	3.14	–	12	4.12	–	28	4.7
–	21	0.0	–	11	5.9	–	27	2.12	–	13	3.8	–	29	4.7
–	22	0.0	–	12	4.10	–	28	3.15	–	14	4.9	–	30	4.6
–	23	0.0	–	13	3.4	–	29	4.20	–	15	3.6	X	2	3.7
–	24	0.0	–	14	2.2	–	30	4.20	–	16	3.5	–	3	3.8
–	27	0.0	–	15	2.3	VII	1	5.24	–	17	4.5	–	4	2.6
–	28	1.3	–	16	1.1	–	2	4.17	–	18	5.7	–	5	2.8
–	29	1.2	–	17	1.4	–	3	3.16	–	19	4.6	–	6	2.7
–	30	1.3	–	18	3.7	–	4	2.14	–	20	3.5	–	7	2.6
–	31	1.4	–	19	3.8	–	5	4.19	–	21	2.2	–	9	2.7
IV	1	1.5	–	20	4.9	–	6	5.22	–	22	2.3	–	10	2.6
–	2	2.2	–	21	5.10	–	7	4.15	–	23	3.5	–	11	2.4
–	3	2.7	–	22	5.9	–	8	4.14	–	24	2.6	–	12	2.5
–	4	2.7	–	23	5.10	–	9	4.9	–	25	2.8	–	13	0.0
–	5	2.2	–	24	7.12	–	10	4.8	–	26	2.7	–	14	0.0
–	6	2.6	–	25	7.17	–	11	3.6	–	27	5.13	–	15	0.0
–	7	2.7	–	26	7.15	–	12	3.6	–	28	6.17	–	16	0.0
–	8	2.2	–	27	6.13	–	13	3.8	–	29	6.23	–	17	0.0
–	9	3.16	–	28	5.10	–	14	3.9	–	30	4.18	–	18	1.7
–	10	2.20	–	29	5.8	–	15	3.9	–	31	4.19	–	19	3.11
–	11	2.20	–	30	3.7	–	16	5.14	IX	1	5.19	–	20	2.16
–	12	2.15	–	31	4.8	–	17	5.16	–	2	5.17	–	21	2.—
–	13	2.13	VI	1	3.9	–	18	5.15	–	3	5.13	–	22	2.14
–	14	2.7	–	2	4.13	–	19	5.14	–	4	5.15	–	23	2.12
–	15	2.4	–	3	4.15	–	20	5.14	–	5	5.16	–	24	3.15
–	16	1.1	–	4	4.19	–	21	4.19	–	6	5.12	–	25	4.19
–	17	1.1	–	5	3.14	–	22	4.12	–	7	3.6	–	26	4.17
–	18	1.2	–	6	2.9	–	23	4.11	–	8	3.6	–	29	4.9

1885			1885			1885			1885			1885		
X	30	4.12	XI	10	3.11	XI	24	1.1	XII	6	0.0	XII	21	1.—
–	31	4.10	–	11	2.6	–	26	0.0	–	7	0.0	–	23	2.2
XI	1	3.6	–	12	2.7	–	27	0.0	–	8	0.0	–	24	2.4
–	2	3.7	–	14	3.10	–	28	0.0	–	9	0.0	–	25	2.2
–	3	2.3	–	15	3.11	–	29	0.0	–	10	0.0	–	27	3.6
–	4	2.2	–	17	3.10	–	30	0.0	–	11	0.0	–	29	3.3
–	5	2.2	–	18	4.11	XII	1	0.0	–	12	0.0	–	30	3.4
–	6	2.2	–	19	4.12	–	2	0.0	–	13	1.1	–		
–	7	1.—	–	20	3.9	–	3	0.0	–	14	1.2	–		
–	8	2.4	–	22	1.2	–	4	0.0	–	17	1.3	–		
–	9	1.—	–	23	1.1	–	5	0.0	–	18	1.—	–		

534) Aus Mittheilung der k. k. Sternwarte in Prag. (Forts. zu 513.)

Nach dieser Mittheilung wurden 1885 in Prag folgende Werthe der täglichen Variation in Declination erhalten:

1885	Variation	Zuwachs gegen 1884
Januar	4′,78	0′,22
Februar	4 ,60	–2 ,11
März	6 ,62	–2 ,00
April	8 ,48	–2 ,95
Mai	9 ,93	-0 ,70
Juni	12 ,79	–0 ,07
Juli	11 ,68	1 ,20
August	10 ,10	1 ,06
September	7 ,41	–1 ,02
October	6 ,94	–0 ,56
November	4 ,98	0 ,39
December	3 ,45	–0 ,96
Mittel	7′,65	–0′,62

Dabei wird bemerkt: „An das Jahresmittel der täglichen Variation der Declination ist die Correction 0′,18 anzubringen wegen der seit 1870 fehlenden Beobachtungsstunde 20^h. Daher ist für 1885 7′,83
als tägliche Variation der Declination anzunehmen.“

535) Beobachtungen der Sonnenflecken in O-Gyalla. — Nach schriftlicher Mittheilung von Herrn Dr. Nic. von Koukoly.

Herr v. Koukoly hat sich zu meiner grossen Freude entschlossen die Zählung der Sonnenflecken künftig auch nach meiner Methode ausführen zu lassen, und ich habe von ihm folgende Beobachtungen erhalten:

1885			1885			1885			1885			1885		
I	2	2.5	II	28	3.11	IV	25	4.7	VI	23	5.12	VIII	11	3.9
–	5	3.7	III	1	3.17	–	26	4.7	–	24	4.11	–	12	3.14
–	8	2.2	–	3	2.19	–	28	5.16	–	26	3.17	–	13	3.9
–	9	1.1	–	5	4.34	–	29	5.14	–	29	3.28	–	14	3.7
–	14	1.2	–	8	4.27	V	2	5.14	–	30	3.31	–	15	3.7
–	17	3.6	–	9	3.20	–	4	4.7	VII	1	3.46	–	16	4.8
–	18	2.16	–	11	3.17	–	6	6.28	–	2	3.16	–	17	2.2
–	19	2.15	–	12	3.16	–	7	6.20	–	3	1.15	–	20	4.6
–	20	3.9	–	13	3.15	–	8	7.27	–	4	2.13	–	22	1.1
–	21	4.19	–	18	1.6	–	10	6.11	–	5	3.14	–	23	3.5
–	22	4.22	–	19	1.4	–	11	6.14	–	8	3.12	–	24	2.10
–	23	3.15	–	20	1.1	–	13	3.10	–	9	3.7	–	25	2.6
–	26	5.10	–	25	2.3	–	17	2.10	–	10	3.7	–	26	1.5
–	27	6.17	–	26	3.8	–	20	6.16	–	11	3.4	–	27	3.9
–	29	5.14	–	27	3.10	–	21	6.12	–	12	3.6	–	28	4.9
–	30	6.11	–	28	2.13	–	23	5.11	–	13	3.6	IX	2	4.11
–	31	3.6	–	29	1.16	–	24	6.14	–	14	3.10	–	3	4.9
II	1	4.8	–	30	1.12	–	29	4.7	–	15	5.17	–	4	4.7
–	2	4.7	–	31	1.9	–	30	4.16	–	17	4.10	–	6	4.8
–	3	4.10	IV	1	2.11	–	31	5.9	–	18	4.11	–	7	3.6
–	7	2.29	–	2	3.7	VI	1	6.16	–	19	4.13	–	10	2.4
–	8	5.44	–	3	3.5	–	3	4.17	–	20	4.11	–	11	2.4
–	11	4.12	–	4	3.12	–	4	4.22	–	22	3.9	–	13	1.3
–	12	5.13	–	10	4.28	–	5	4.18	–	23	5.14	–	14	1.3
–	13	5.13	–	11	4.24	–	6	5.16	–	27	4.10	–	15	1.1
–	14	5.20	–	12	4.24	–	7	5.17	–	28	4.12	–	16	2.4
–	15	5.39	–	14	2.12	–	8	5.17	–	30	2.4	–	17	2.6
–	16	6.25	–	15	2.8	–	9	2.13	–	31	2.6	–	18	2.9
–	18	5.20	–	16	2.5	–	10	2.12	VIII	1	2.5	–	19	3.6
–	19	5.25	–	18	2.6	–	13	4.10	–	2	2.7	–	20	2.5
–	20	8.30	–	19	1.4	–	14	3.10	–	3	2.5	–	22	3.4
–	22	6.17	–	20	2.5	–	15	5.10	–	5	3.7	–	23	2.2
–	23	4.8	–	21	3.18	–	16	6.25	–	6	3.7	–	24	2.2
–	25	2.7	–	22	4.13	–	17	6.19	–	7	3.6	–	25	3.3
–	26	2.2	–	23	4.12	–	18	4.23	–	9	4.18	–	26	5.6
–	27	2.4	–	24	4.7	–	20	4.15	–	10	4.10	–	27	5.7

1885			1885			1885			1885			1885		
IX	28	5.9	X	14	0.0	X	30	4.17	XII	2	0.0	XII	21	3.5
–	30	4.5	–	16	0.0	–	31	4.9	–	3	1.1	–	27	3.5
X	1	4.5	–	17	1.1	XI	4	2.2	–	4	1.1	–	28	3.6
–	3	3.5	–	19	2.8	–	9	3.12	–	9	1.2	–	29	3.9
–	4	3.7	–	21	2.8	–	10	4.16	–	11	2.2	–	31	3.8
–	6	3.7	–	22	2.11	–	11	3.17	–	14	1.1			
–	7	3.4	–	23	3.13	–	17	4.9	–	16	1.2			
–	9	2.4	–	24	3.10	–	24	1.1	–	18	2.3			
–	12	2.2	–	25	4.18	XII	1	0.0	–	20	3.6			

536) Monthly Weather Review. (Forts. zu 520.)

Es werden, in Fortsetzung der frühern, folgende, zunächst von Professor David P. Todd, Director of the Lawrence Observatory (Amherst, Massachusetts) gemachte Zählungen mitgetheilt:

1885			1885			1885			1885			1885		
I	2	3.7	II	25	5.20	IV	11	5.120	V	29	9.50	VII	14	7.—
–	3	4.20	–	28	3.65	–	14	2.40	VI	1	6.70	–	15	7.105
–	5	4.20	III	2	5.90	–	16	2 30	–	2	5.120	–	16	9.110
–	7	3.10	–	3	5.90	–	18	1.10	–	3	5.150	–	18	8.—
–	13	1.5	–	4	6.135	–	20	3.15	–	5	5.—	–	19	8.110
–	14	1.3	–	5	6.150	–	21	3.—	–	6	5.80	–	20	7.85
–	17	2.10	–	6	6.120	–	22	3.20	–	8	4.60	–	22	6.115
–	18	2.45	–	8	6.63	–	23	3.30	–	9	3.60	–	23	5.65
–	19	2.40	–	10	6.25	–	25	3.25	–	10	4.80	–	24	4.—
–	21	6.65	–	11	6.20	–	27	6.35	–	11	6.90	–	25	4.—
–	23	6.65	–	12	4.15	–	29	5.28	–	12	6.—	–	27	4.55
–	26	7.45	–	13	6.20	–	30	7.50	–	14	8.80	–	28	2.—
–	27	6.40	–	14	5.15	V	1	7.—	–	16	9.—	–	29	2.35
–	29	5.30	–	16	5.15	–	2	7.70	–	17	10.170	–	30	3.25
–	30	5.20	–	17	4.12	–	3	6.85	–	18	7.—	–	31	4.35
II	31	5.25	–	18	4.15	–	4	5.—	–	19	5.170	VIII	4	3.25
–	2	5.25	–	21	2.3	–	9	9.90	–	22	6.—	–	6	3.30
–	5	5.70	–	22	0.0	–	10	6.65	–	23	8.140	–	8	7.70
–	6	5 60	–	23	0.0	–	11	7.60	–	29	8.—	–	9	6.90
–	7	5.60	–	24	2.3	–	12	4.50	–	30	8.—	–	11	4.80
–	10	4.45	–	25	3.12	–	15	3.10	VII	1	7.—	–	14	5.55
–	11	5.45	–	26	4.25	–	16	4.25	–	3	7.—	–	15	5.50
–	13	5.45	–	28	3.40	–	18	4.—	–	4	8.—	–	16	5.35
–	15	6.70	–	30	3.60	–	19	5.65	–	6	6.—	–	17	4.20
–	17	6.70	–	31	3.50	–	21	7.75	–	7	5.—	–	20	4.20
–	18	7.75	IV	1	3.50	–	22	7.115	–	8	5.65	–	22	3.15
–	20	9.95	–	4	6.50	–	24	8.100	–	9	5.65	–	26	3.40
–	21	9.60	–	5	5.60	–	25	8.160	–	10	5.60	–	27	3.45
–	23	5.35	–	6	6.50	–	26	8.150	–	11	7.40	–	28	5.55
–	24	5.30	–	9	4.90	–	28	8.85	–	12	7.60	–	30	4.75

1885			1885			1885			1885			1885		
VIII	31	4.90	IX	17	3.25	X	12	4.20	XI	10	4.60	XII	8	2.4
IX	1	4.90	-	20	2.3	-	14	3.12	-	11	5.50	-	11	3.10
-	2	5.100	-	21	3.15	-	16	1.2	-	13	4.35	-	12	2.5
-	3	5.85	-	24	4.35	-	18	4.40	-	15	3.60	-	15	2.15
-	4	4.70	-	26	5.65	-	20	4.35	-	17	5.70	-	17	2.10
-	6	3.45	-	27	6.35	-	22	3.65	-	20	4.40	-	20	4.12
-	7	3.35	X	1	5.12	-	23	4.80	-	27	0.0	-	22	3.10
-	8	4.30	-	4	4.25	-	24	5.95	-	29	1.3	-	24	7.30
-	11	2.15	-	7	4.30	-	25	7.115	XII	2	1.15	-	25	5.20
-	12	1.20	-	9	4 25	XI	3	3.12	-	3	1.10	-	29	3.50
-	14	3.40	-	10	3.40	-	4	3.7	-	6	0.0	-	30	3.40
-	16	2.20	-	11	4.25	-	6	3.25	-	7	0.0			

537) Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani raccolte e pubblicate per cura del. Prof. P. Tacchini. (Forts. zu 516.)

Herr Prof. Tacchini theilt folgende in Rom erhaltene Zählungen mit:

1885			1885			1885			1885			1885		
I	2	3.6	II	8	7.32	III	6	4.33	IV	5	3.19	V	9	9.28
-	3	4 14	-	9	7.31	-	7	5.49	-	6	4.25	-	10	6.22
-	4	4.11	-	10	8.28	-	8	5.28	-	10	3.23	-	11	5.16
-	5	4.29	-	11	5.19	-	9	4.20	-	13	3.34	-	12	4.13
-	8	3.7	-	12	6.23	-	10	5.15	-	15	2.14	-	14	3.6
-	9	1.2	-	13	6.22	-	11	3.—	-	16	2.7	-	16	4.9
-	10	2.5	-	14	6.33	-	12	4.9	-	18	2.8	-	17	3.13
-	14	1.3	-	15	7.29	-	14	4.12	-	19	1.5	-	18	4.14
-	17	4.14	-	16	8.42	-	15	3.14	-	20	2.6	-	19	4.14
-	18	2.20	-	17	7.31	-	16	4.12	-	21	3.11	-	20	7.20
-	19	2.18	-	18	7.39	-	17	2.10	-	22	3.13	-	21	8.19
-	20	4.18	-	19	9.33	-	19	1.6	-	23	4.13	-	22	7.19
-	21	5.34	-	20	9.36	-	20	1.2	-	24	5.12	-	23	7.21
-	22	6.38	-	21	7.20	-	21	1.2	-	25	4.19	-	24	9.32
-	23	5.37	-	22	7.24	-	22	0.0	-	26	4.11	-	25	9.34
-	24	6.37	-	23	5.20	-	23	0.0	-	27	6.15	-	26	9.37
-	26	8.34	-	24	4.16	-	24	1.4	-	28	5.12	-	27	7.19
-	27	7.27	-	25	4.14	-	25	2.9	-	30	7.30	-	28	5.14
-	28	7.22	-	26	3.6	-	27	3.13	V	2	5.25	-	29	5.14
-	29	7.26	-	27	3.7	-	28	3.13	-	3	5.29	-	30	7.16
-	30	6.25	-	28	5.21	-	30	3.21	-	4	4.12	-	31	5.15
II	1	6.19	III	1	3.25	-	31	3.17	-	5	5.22	VI	1	7.32
-	4	5.41	-	2	5.32	IV	1	3.16	-	6	6.23	-	2	5.25
-	6	3.—	-	3	5.32	-	2	4.23	-	7	6.43	-	3	6.43
-	7	5.30	-	5	6.46	-	4	3.21	-	8	7.34	-	4	5.32

1885			1885			1885			1885			1885		
VI	5	5.31	VII	13	4.14	VIII	19	4.10	IX	27	5.20	XI	22	3.9
–	6	3.21	–	14	4.16	–	20	4.8	–	28	5.16	–	23	3.8
–	7	5.24	–	15	5.19	–	21	3.8	–	29	5.17	–	24	1.2
–	8	6.25	–	16	4.16	–	22	1.2	–	30	3.6	–	25	2.4
–	9	3.17	–	17	5.15	–	23	3.8	X	1	4.8	–	26	1.2
–	10	3.15	–	18	7.27	–	24	3.9	–	2	4.11	–	27	0.0
–	11	4.14	–	19	7.22	–	25	2.8	–	3	3.11	–	28	2.7
–	13	6.21	–	20	7.25	–	26	3.11	–	4	4.11	–	29	1.3
–	14	6.19	–	21	5.24	–	27	4.18	–	5	3.18	–	30	0.0
–	15	8.21	–	22	4.18	–	28	5.27	–	6	3.15	XII	3	1.2
–	16	9.35	–	23	7.19	–	29	4.22	–	8	3.20	–	4	1.2
–	17	8.31	–	24	5.13	–	30	4.19	–	10	4.22	–	5	0.0
–	18	8.31	–	25	5.12	IX	1	5.15	–	12	3.—	–	6	0.0
–	19	6.33	–	26	3.12	–	2	4.18	–	14	1.3	–	7	0.0
–	20	5.22	–	27	4.14	–	3	4.16	–	16	1.2	–	9	1.3
–	21	4.18	–	28	4.13	–	4	5.11	–	17	2.6	–	10	3.6
–	22	3.15	–	29	4.11	–	5	6.20	–	18	1.6	–	11	3.6
–	23	6.23	–	30	2.6	–	6	4.11	–	19	3.13	–	12	3.7
–	24	6.23	–	31	3.10	–	7	3.9	–	20	2.15	–	13	3.7
–	25	6.18	VIII	1	3.10	–	8	4.8	–	21	3.14	–	14	1.2
–	26	3.19	–	2	2.4	–	9	3.6	–	22	2.19	–	15	1.5
–	27	3.18	–	3	3.10	–	10	2.7	–	23	3.16	–	16	1.4
–	28	3.17	–	4	3.8	–	11	2.5	–	27	4.15	–	17	1.4
–	29	4.23	–	5	3.9	–	12	3.7	–	28	7.26	–	18	2.5
–	30	5.23	–	6	4.9	–	13	2.12	–	29	4.20	–	19	2.6
VII	1	6.22	–	7	4.12	–	14	2.10	–	30	4.23	–	20	4.12
–	2	5.24	–	8	3.12	–	15	1.6	XI	1	3.12	–	21	4.9
–	3	5.47	–	9	5.25	–	16	2.9	–	2	3.10	–	24	3.8
–	4	2.—	–	10	3.20	–	17	2.9	–	5	1.2	–	25	3.7
–	5	3.24	–	11	3.15	–	18	2.11	–	6	3.8	–	26	4.10
–	6	4.25	–	12	3.20	–	19	3.9	–	7	3.6	–	27	3.9
–	7	4.14	–	13	3.8	–	20	3.7	–	8	3.10	–	28	3.10
–	8	4.8	–	14	3.12	–	21	2.5	–	10	4.17	–	29	3.11
–	9	4.8	–	15	4.15	–	22	3.8	–	11	4.14	–	31	3.9
–	10	4.9	–	16	4.11	–	23	4.9	–	12	3.8			
–	11	4.10	–	17	4.9	–	24	3.6	–	13	3.6			
–	12	4.10	–	18	5.12	–	25	4.12	–	16	3.14			

538) Magnetische Beobachtungen der k. Sternwarte zu Bogenhausen bei München im Jahre 1885. — Aus Jahrg. 1885 der Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Bayern. (Forts. zu 521).

Es wurden folgende Bestimmungen erhalten:

1885	8^h	10^h	2^h	9^h	Variationen	
					1885	Zuwachs seit 1884
I	11°48',77	49',36	52',55	48',29	4',26	-1',39
II	48 ,39	49 ,02	52 ,53	48 ,39	4 ,14	-3 ,86
III	46 ,44	47 ,42	54 ,55	48 ,70	8 ,11	-3 ,10
IV	45 ,19	47 ,16	55 ,44	48 ,77	10 ,25	-3 ,14
V	45 ,23	48 ,98	55 ,15	48 ,21	9 ,92	-0 ,47
VI	43 ,59	47 ,15	55 ,07	48 ,50	11 ,48	-0 ,22
VII	43 ,23	47 ,39	54 ,25	47 ,97	11 ,02	1 ,02
VIII	43 ,74	48 ,80	53 ,32	47 ,14	9 ,58	-2 ,69
IX	43 ,83	47 ,03	52 ,07	44 ,76	8 ,24	-2 ,05
X	44 ,00	44 ,70	50 ,62	44 ,29	6 ,62	-1 ,95
XI	44 ,36	44 ,97	48 ,31	43 ,67	4 ,64	0 ,04
XII	44 ,06	44 ,76	46 ,45	43 ,64	2 ,81	-0 ,63
				Jahresmittel	7',59	-1',54

welchen ich noch die Differenzen zwischen Maximum und Minimum als Variationen und deren Zuwachs gegen die entsprechenden Zahlen von 1884 zugefügt habe. Die mittlere Declinationsvariation würde also in Bogenhausen im Jahre 1885 unter Zuschlag der in No. 503 ermittelten Correction

7',80

betragen haben.

Zum Schlusse gebe ich noch eine kleine Fortsetzung des in Nr. XXIX begonnenen, dann wiederholt und zuletzt noch in Nr. LXVI fortgesetzten Verzeichnisses der Instrumente, Apparate und übrigen Sammlungen der Zürcher-Sternwarte.

318) Kometen-Medaille. — Geschenkt von Prof. Wolf.

Eine silberne Medaille von 27 mm Durchmesser und circa 4 Gramm Gewicht, welche auf der Vorderseite einen im Sternbilde des Adlers stehenden Kometen und die ihn umgebenden Sterne zeigt, während darunter zu lesen ist: „A.° 1680. 16. Dec. 1681 Jan.“ Auf der Rückseite steht:

„DER STERN DROHT BOESE SACHEN:
TRAV NVR!
GOTT **VVIRDS VVOL MACHEN.**“

so dass die fetten Buchstaben zusammen die Jahrzahl MDCLXXXI = 1681 ausmachen. Das mir vorliegende Exemplar habe ich vor einigen Jahren in einem fremden Auctionscataloge gefunden und damals erstanden; ein anderes Exemplar besitzt die Stadtbibliothek in Zürich.

319) Ansicht der Sternwarte in Kiel. — Geschenkt von Herrn Landschaftsmaler Töche in Zürich.

Eine Photographie von G. Renard in Kiel in Cabinetformat.

320) Abbildung des Refractors der Villa Kann bei Zürich. — Geschenkt von Herrn Dr. Julius Maurer.

Eine Abbildung in 1/15 natürlicher Grösse des von der Firma Hartmann und Braun in Bockenheim bei Frankfurt a./M. in dem Kuppelraume der Villa Kann in Enge bei Zürich aufgestellten Refractors. Das Objectiv von 8 Zoll Durchmesser und 3.15 ^{m} Brennweite wurde von Merz in München geliefert; die Oculare, Spektroskope, Aufsuchungskreise, etc., sowie das Uhrwerk, die vom Ocularende aus ausführbaren mikrometrischen Bewegungen, und überhaupt die ganze Aufstellung besorgten dagegen Hartmann und Braun selbst.

321) Porträte von Lagrange und Laplace. — Geschenkt von Herrn Gauthier-Villars in Paris.

Es sind die beiden schönen Stiche von 28 ^{cm} Höhe auf 22 ^{cm} Breite, mit welchen Herr Gauthier-Villars die in seinem Verlage erschienenen Werke der beiden grossen französischen Mathematiker geschmückt hat, — und von welchen das Erstere die Signaturen „Heim pinx^{t}, — Ach. Martinet sculp^{t}“, das Zweite die Signaturen „Maigeon pinx^{t}, — Mlle Houssaye del., — Tony Goutière sculp^{t}“ zeigt. Da ich dieselben für die Sammlung der Sternwarte zu besitzen wünschte, so erlaubte ich mir Herrn Gauthier-Villars anzufragen, ob er mir je ein Exemplar zu diesem Zwecke ablassen wollte, und erhielt nun sofort Beide mit der Dedication: „Hommage à M. Rod. Wolf: Gauthier-Villars“ als Geschenk. — In meinem Dankschreiben erbat ich mir

einige Angaben über die Originale der beiden Porträte, und erhielt nun alsbald eine ebenso verbindliche als interessante Antwort, welche ich glaube hier in extenso beifügen zu sollen. Herr Gauthier schrieb mir nämlich unter dem 8. Mai 1885: „Je suis heureux que l'envoi des portraits de Lagrange et Laplace vous ait fait plaisir, et je puis dire que j'ai saisi avec empressement cette occasion d'être agréable à un savant de votre distinction, si dévoué à la chose publique. — Voici les renseignements que vous désirez sur les originaux de ces portraits: Celui de Lagrange, peint par Heim, se trouve dans les salles de l'Académie des Sciences à l'Institut de France. — Quant au portrait de Laplace, qui a servi de modèle au graveur, il a été peint par Maigeon, et appartient à la petite fille de Laplace, Madame la Marquise de Colbert-Chabanais. Madame de Colbert, qui a un dévouement absolu à la mémoire de son grand père, a voulu que le nom de Laplace ne disparaisse pas et a obtenu que son second fils porte le nom de Colbert-Laplace. Le portrait dont il s'agit est au château de Mailloz près de Bayeux. — Si vous désirez quelques autres renseignements, je suis entièrement à votre disposition". — Ich füge in Beziehung auf diese Porträte noch bei, dass, während man von Laplace noch mehrere frühere Porträte besitzt, wie namentlich dasjenige, welches den spätern Ausgaben der „Exposition du Système du Monde" beigegeben wurde, diess in Betreff von Lagrange nicht der Fall zu sein schien. Um so freudiger wurde ich überrascht, als ich in den spätern 40er Jahren bei einem Antiquar in Mailand einen sehr schönen Stich von 22 auf $15^1/_2$ cm auffand und erstehen konnte, welcher Lagrange als noch jungen Mann darstellt, — doch so, dass die Hauptzüge mit dem spätern Bilde ganz gut übereinstimmen: Lagrange ist auf demselben ganz im Profil in einem Oval von 93 mm Höhe und 72 mm Breite dargestellt, um welches in kleiner Schrift „A. Dalcò inc. nello Studio Isac e Toschi" eingravirt ist. Unter dem Bilde liest man: „Giuseppe Luigi Lagrangia. A Giandomenico Romagnosi in segno di reverenza ed ammirazione l'Incisore."

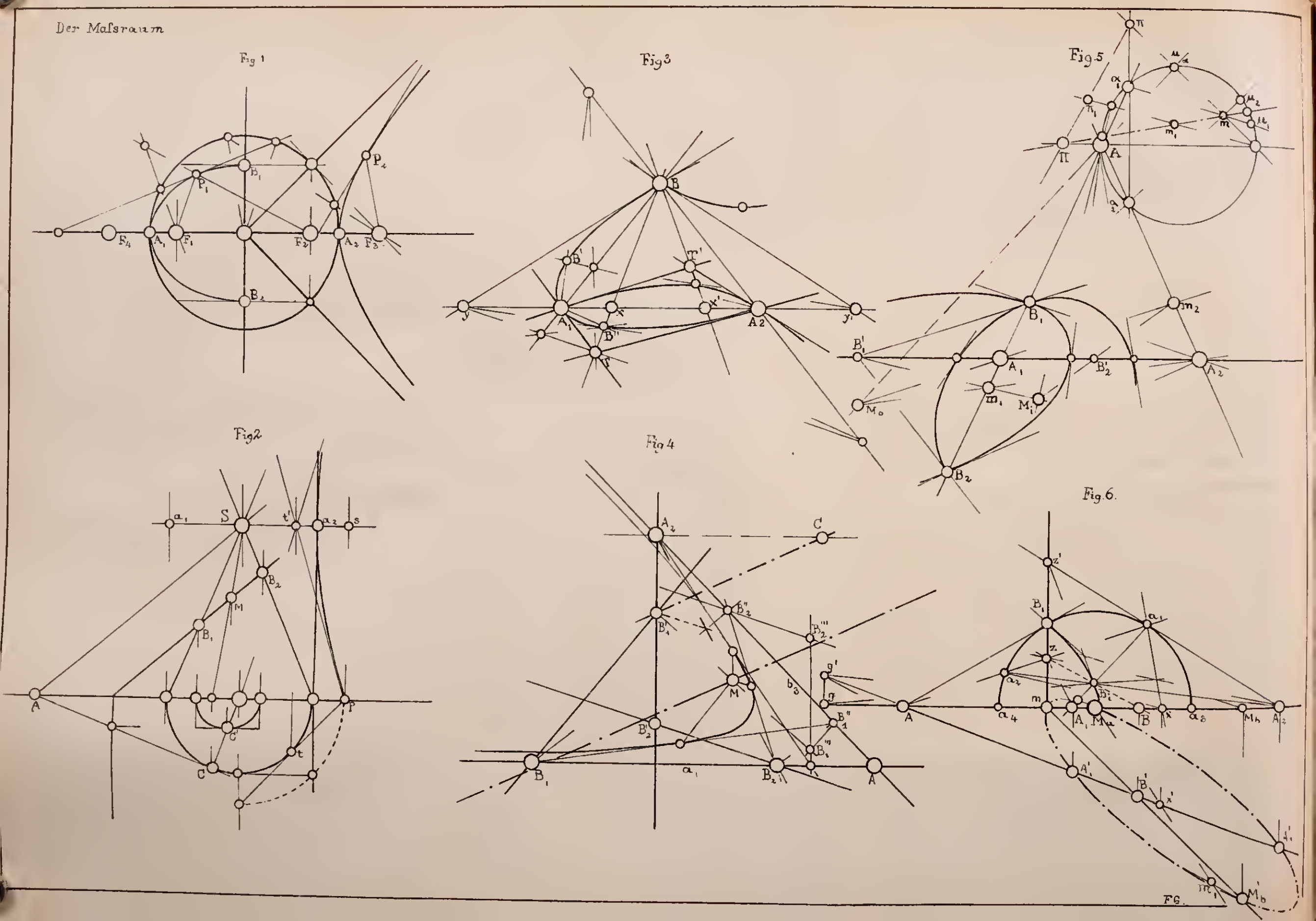
322) Sandapparat. — Geschenkt von Prof Wolf.

Ein Apparat, welchen ich nach Abschluss der in Nr. 58 meiner Mittheilungen behandelten Versuche über Sand-Auslauf

bei Mechanicus Rudolf Hottinger-Goldschmid sel. in Zürich ausführen liess, um jene Versuche mit grösserer Accuratesse, als es bei dem früher benutzten ganz rohen Apparate möglich gewesen war, noch einmal aufzunehmen. Es sind denn auch in der That unter meiner Anleitung durch meinen frühern Privatassistenten, Herrn Emil Blattner, mehrere ausgedehnte Serien ausgeführt worden, welche ich, sobald ich Zeit finde die noch ausstehenden Rechnungen auszuführen, publiciren und dabei die nöthigen genauern Angaben über den Apparat beifügen werde, so dass ich hier nicht nöthig finde mich näher darüber auszusprechen.

323) Schrittzähler. — Geschenkt von Herrn Kaiser, gew. Telegrapheninspector.

Der Vorliegende ist ein Schrittzähler (Hodometer, Pedometer) der ältern Art, ähnlich demjenigen, welchen Levin Hulsius 1604 in s. „Vierdten Tractat der mechanischen Instrumenten" beschrieben hat: Er wird am Gürtel angehängt, während die von dem sog. „beweglichen Zug" auslaufende Schnur am einen Knie befestigt wird, so dass bei jedem mit dem betreffenden Beine ausgeführten Schritt ein Zug entsteht, durch welchen zwei übereinander liegende Räder um einen Zahn verschoben werden, was durch zwei ihnen entsprechende Zeiger auf einem mit zwei Hunderttheilungen versehenen Zifferblatte von 6 ^{cm} Durchmesser zur Anschauung kömmt. Da nun dasjenige Rad, welchem der kürzere Zeiger entspricht, 100 Zähne, — das andere aber nur 99 Zähne hat, so kommt, wenn anfänglich beide Zeiger auf Null standen, nach 100 Zügen der kürzere Zeiger wieder zum Nullpunkte zurück, während der Längere um eine Einheit weiter gegangen ist, so dass eine solche an der äussern Theilung 100 Schritten entspricht. Es geht daraus hervor, dass in jedem Momente aus der Stellung der Zeiger auf die Anzahl der gemachten Schritte geschlossen werden kann, und zwar gibt die Zeigerdifferenz die Hunderter, der kürzere Zeiger die Einer.


Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig. 5
Fig. 6.

Der Massraum, eine Erweiterung des Masstabes

von

F. Graberg.

Eine geometrische Figur, welche durch vielfache Anwendung ohne weitere Erklärung verständlich wird, kann als Masszeichen zur Auffassung und Herstellung zusammengesetzter Gebilde dienen, wie die Theilstriche des Masstabes zur Ermittlung der Längen eines Planes. Zwei Höhen eines Dreieckes z. B. zeigen den Höhenpunkt desselben an; da die 3. Höhe durch denselben gehen muss, so kann diese gezeichnet werden, wenn auch die 3. Ecke des Dreieckes ausserhalb des Zeichenblattes liegt. Der Höhenpunkt hat in diesem Falle als Masszeichen gedient... Durch die Theilstriche wird der Massstab in Abschnitte zerlegt, die Masszeichen gliedern zunächst die Zeichenfläche, in weiterem Sinne den Raum. Mit diesem gegliederten vergleichen, messen wir die Gestalten im freien Raume. Ich habe daher den gegliederten Raum, wie er durch die Masszeichen sinnbildlich dargestellt wird, den Massraum genannt. Der Massraum ist eine Erweiterung des Masstabes, nicht nur insofern, als an die Stelle einer einfachen Ausdehnung eine dreifache tritt, sondern auch im Sinn einer umfangreicheren Bedeutung der Punkte und Linien, sowie einer vollkommneren Berücksichtigung aller Raumelemente. Diese beiden Richtungen in der Ausgestaltung des Massraumes sollen hier an einer Reihe von Beispielen gezeigt werden.

1. Die Massformen: Kreisfläche und Kugel, Cylinder und Kegel sind von so einfacher Gestalt, dass wir nur deren Grösse durch die Masse bestimmter gerader Linien bezeichnen: Durchmesser bei Kreisfläche und Kugel, Durchmesser und Höhe bei Cylinder und Kegel. Für die Bezeichnung derselben reicht also der Masstab aus, welcher das Verhältniss der gezeichneten Linien zu den entsprechenden Längen des Körpers darstellt.

2. Ort. Wenn ein Punkt seine Lage gegen einen festen Punkt verändert, z. B. in einer bestimmten Richtung, so fasst man die ganze Folge von Stellungen in eine Linie zusammen und nennt dieselbe den Ort des Punktes. Räumlich aufgefasst ist also der Ort eine stetige Folge von Stellungen des Punktes und die raum-zeitliche Vorstellung einer Bewegung nur ein Hülfsmittel der Versinnlichung. Man erklärt daher die Kreislinie: als Ort aller Punkte, oder als Ort aller Geraden

einer Ebene, welche von einem festen Punkte
gleich weit entfernt sind;

als Ort aller Punkte der Ebene, von welchen aus eine gegebene Strecke unter gleichem Winkel gesehen wird u. s. w.

3. Ort als Masszeichen. Wenn zu einem Dreieck die Grundlinie vorgezeichnet, der dieser gegenüberliegende Winkel und die Höhe der Grösse nach gegeben sind, so findet man die Spitzen zweier solchen Dreiecke in den Schnittpunkten eines durch die Endpunkte der Grundlinie gelegten Kreises und einer mit ihrer Richtung parallelen Geraden. Der Kreisort fasst alle Winkel von gegebener Grösse über der vorgezeichneten Strecke zusammen, die Parallele dagegen die senkrechten Abstände von derselben mit der gegebenen Grösse.

4. Kegelschnitte. Alle Punkte der Ebene, deren Abstandssumme oder — Differenz von 2 festen Punkten dieselbe ist, erfüllen eine Ellipse oder Hyperbel. Wenn der eine Schenkel eines rechten Winkels in einem Punkte festgehalten ist, während der Scheitel sich auf einem Kreise bewegt, so umhüllt der andere Schenkel eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der feste Punkt innerhalb oder ausserhalb des Leitkreises sich befindet.

Diese 4 Sätze und eine Reihe von Ableitungen aus denselben fasst die Fig. 1 in ein Masszeichen zusammen, welches dem Kundigen auf den ersten Blick die Kegelschnitte vergegenwärtigt, welche demselben Kreis und verschiedenen Punktepaaren auf einem seiner Durchmesser oder demselben Punktepaar und den concentrischen Kreisen um seinen Mittelpunkt entsprechen. Alle diese Kegelschnitte werden daher durch das Masszeichen eines Punktepaares und eines Kreises um seinen Mittelpunkt sinnbildlich zusammengefasst.

5. Kegelfläche als Masszeichen. Eine Kegelfläche mit kreisförmiger Leitlinie wird durch eine Ebene nach einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel geschnitten, je nachdem der Parallelstrahl zu der Ebene durch die Spitze des Kegels ausserhalb, innerhalb oder auf der Mantelfläche desselben liegt.

Denkt man sich auf jeder Berührungsebene des Kegels in gleichen Abständen zu beiden Seiten der Mantellinie Parallele mit dieser gezogen, so umhüllen dieselben eine Rotationsfläche, deren Umriss in der Meridianebene eine Hyperbel ist; indem die Mantellinien des Kegels in dieser Meridianebene Asymptoten der Hyperbel darstellen und die Zeichnung die harmonische Lage der Schnittpunkte (t) der Tangentenpaare in der Ebene des Kehlkreises, der

entsprechenden Berührungssehnen $|s|$ und der beiden senkrechten Scheiteltangenten $|a_1\ a_2|$ erkennen lässt. Die Fig. 2 fasst alle diese Gestalten in einem Masszeichen zusammen, dessen Kern der Kegel ist.

6. Elementargestalten als Masszeichen. Das Strahlbüschel fasst die stetige Folge der Richtungen zusammen, die in einer Ebene durch denselben Punkt gehen. Zwei sich schneidende Gerade fassen, als Punktreihen betrachtet, die sämmtlichen Geraden einer Ebene zusammen.

Wird von 2 Geraden, welche sich nicht treffen, die eine als Schnitt, die andere als Punktreihe betrachtet, so fassen dieselben in dem Ebenenbüschel die stetige Folge von Ebenen zusammen, welche die Schnittgerade gemeinsam haben.

In dem Strahlen- oder Ebenenbündel endlich werden die sämmtlichen Strahlen oder Ebenen zusammengefasst, welche durch denselben Punkt gehen.

7. Doppelverhältniss. Ist von den 3 Eckpunkten eines Dreieckes, ABC, welche stets eine Ebene bestimmen, (A) der Schnitt zweier Strahlen $|b, c|$, während (B, C) die Richtung von $|a|$ bezeichnen, und schneidet ein weiterer Strahl $|d|$ des Büschels (A) die Grundlinie $|a|$ in (D), so ist das Verhältniss der Abschnitte $BD : CD$ dem Verhältniss der senkrechten Abstände $Bd : Cd$ gleich.

Ebenso besteht für einen 4. Strahl $|e|$ des Büschels (A) die Gleichheit: $BE : CE = Be : Ce$; daraus folgt die der Doppelverhältnisse:

$$\frac{BD}{BE} : \frac{CD}{CE} = \frac{Bd}{Be} : \frac{Cd}{Ce}$$

Wird rechts Zähler und Nenner mit $|BA, CA|$ gemessen, so ergibt sich, dass dem Doppelverhältniss der

Abschnitte auf $|a|$ ein gleiches Doppelverhältniss der Sinuszahlen gegenüberliegender Winkel im Strahlbüschel (A) entspricht. Auf Grund der Gleichheit dieser Doppelverhältnisse werden die Punktepaare der Reihe $|a|$ auf die Strahlenpaare des Büschels (A) bezogen und umgekehrt; ebenso die Punktepaare zweier Punktreihen, anderseits die Strahlenpaare zweier Büschel zu einander in Beziehung gebracht. Diese Beziehung ist durch 3 entsprechende Elemente (Punkte, Strahlen) der beiden einander zugeordneten Masszeichen (Punktreihe, Strahlbüschel) gegeben, auch dann, wenn z. B. die Punkte nicht auf den ihnen entsprechenden Strahlen liegen, die beiden einander zugeordneten Masszeichen sich also in schiefer Lage befinden.

8. Schnittlage. Liegen drei Schnitte entsprechender Strahlen zweier einander zugeordneter Büschel auf einer Geraden, so treffen auch alle übrigen Paare entsprechender Strahlen auf derselben zusammen, denn eine solche Gerade kann als Schnitt der Ebenen betrachtet werden, welche die zugeordneten Strahlbüschel erfüllen; dann bezeichnen ihre Mittelpunkte die Axe eines Ebenenbüschels und die 3 Paare entsprechender Strahlen 3 Ebenen desselben; alle weitern entsprechenden Strahlenpaare der beiden Büschel müssen dann auch je in einer Ebene des Ebenenbüschels liegen, dessen Doppelverhältniss durch jene drei Ebenen gegeben ist.

Wenn 3 Verbindungsstrahlen entsprechender Paare zweier Punktreihen durch denselben Punkt gehen, so liegen dieselben in einer Ebene. Jeder weitere Strahl dieses Büschels theilt die beiden Punktreihen nach demselben Doppelverhältniss, welches durch die 3 ersten Strahlen bestimmt ist und es fallen in dem Schnitt der beiden

Punktreihen zwei entsprechende Punkte zusammen; dieser ist also das Masszeichen, dafür, dass die Punktreihen sich in Schnittlage befinden. Analog findet im Falle der beiden Strahlbüschel Schnittlage statt, wenn die Lotebene durch die Axe des Ebenenbüschels entsprechende Strahlen der beiden Büschel enthält, da wir alle Risse am einfachsten durch Senkrechte zur Zeichenebene hervorgebracht denken.

9. Schieflage. Wenn die 3 entsprechenden Strahlenpaare zweier Strahlbüschel sich in 3 Punkten treffen, welche nicht auf derselben Geraden liegen, so können diese nur dann wirkliche Schnittpunkte sein, wenn die beiden Strahlbüschel selbst in einer Ebene liegen; auch alle übrigen Strahlenpaare ergeben nur unter dieser Bedingung wirkliche Schnittpunkte, im Allgemeinen aber werden die Kreuzungen nur Deckpunkte darstellen. Die Strahlbüschel befinden sich daher in solchem Falle nicht mehr in Schnittlage sondern in Schieflage. Ebenso haben zwei Punktreihen im Allgemeinen keinen Punkt gemein, wenn die 3 Verbindungsstrahlen entsprechender Punktepaare nicht durch denselben Punkt gehen.

Für die Bestimmung der übrigen entsprechenden Elementenpaare ist die Annahme, dass die auf einander bezogenen Masszeichen in derselben Ebene liegen die einfachste.

10. Curven 2. Ordnung. Bekanntlich ist der Ort der Schnitte entsprechender Strahlenpaare zweier schiefliegender projectivischer Strahlbüschel, sowie der Hüllort der Verbindungsstrahlen entsprechender Punktepaare zweier schiefliegender Punktreihen eine Curve 2. Ordnung.

11. Dreieck als Masszeichen für Kegelschnitte. Wenn von den 3 Schnittpunkten entsprechender Strahlen-

paare je einer mit einem der beiden Mittelpunkte der Büschel zusammenfällt, so entsprechen dem Verbindungsstrahl der Mittelpunkte beiderseits die Tangenten an diese letzteren. Diese Anlage ist in Fig. 3 gewählt, da sie die allgemeinere mit 5 gegebenen Punkten für unseren Zweck genügend vertritt. Der Punkt (B) bestimmt mit (A_1, A_2) die Zeichenebene und wird zum Mittelpunkt eines Büschels gewählt, auf dessen Strahlen sich die Schnitte der Tangenten (T) verschieben. Jedes Büschel (T) bezieht $|A_1 B, A_2 B|$ und mittelst dieser Reihen die Büschel (A_1, A_2) aufeinander und ergibt einen Kegelschnitt. Jede Verbindung $|B B'|$ theilt als Diagonale eines Vierseits $|A_1 A_2|$ in (y') harmonisch zu $(A_1 A_2 x')$; auch die Tangente $|By|$, welche dem Strahle $|T B|$ entspricht, theilt $|A_1 A_2|$ harmonisch zu (x). Ist also (x) äusserer Theilpunkt der Strecke $|A_1 A_2|$, so wird (y) innerer Theilpunkt derselben und in solchem Falle sind die durch $(A_1 A_2 B)$ gehenden Kegelschnitte stets Hyperbeln. Befindet sich dagegen $|B T|$ in dem Winkelraum $[A_1 B A_2]$, so zeigt uns $|T_p B = Bx|$ die Stelle von (T) für welche der harmonisch zugeordnete (B^*) zu $|T x B|$ im Unendlichen liegt. Der Kegelschnitt ist also eine Parabel. (T_p, x) theilen $|B T|$ in 3 Abschnitte, die im Unendlichen zusammenhängen. Befindet sich (T) im Abschnitte $|T_p x|$, so liegt er auch zwischen (B und B^*) und der Kegelschnitt ist eine Hyperbel; fällt dagegen (T) in den anderen Abschnitt: $|T_{p\infty} x|$ so sind die entsprechenden Kegelschnitte stets Ellipsen. Die Figur 8 ist also das Masszeichen für eine 2fach unendliche Manigfaltigkeit von Kegelschnitten.

Durchläuft (B) die Punktreihe des Lothes zur Zeichenebene $|\mathrm{b}|$, so erhält man die Kegelschnitte in den Ebenen

des Büschels $|A_1 \, A_2|$; die Kegelschnitte der Zeichenebene sind die Grundrisse jener sämmtlichen Kegelschnitte des Massraumes, den die Fig. 3 vertritt.

Analoge Betrachtungen weckt das Masszeichen für die projektivische Beziehung zweier schiefliegender Punktreihen.

12. Gerade und Punkt als Masszeichen für Regelflächen 2. O. Zwei Ebenenbüschel, deren Axen sich nicht treffen, erzeugen, durch dieselbe Punktreihe aufeinander bezogen, eine Regelschaar. Da nämlich die Punktreihe keine der Axen schneidet, bestimmt jeder Punkt dieser Reihe mit den beiden Axen ein Paar entsprechender Ebenen.

Liegt eine der Axen $|a_1|$ in der Zeichenebene, so befindet sich auch eine Gerade der Regelschaar in derselben und geht durch die Spur (A_2) der anderen Axe wie Fig. 4 zeigt. Ausser dieser können noch 2 andere Strahlen der Regelschaar $|b_1, b_2|$, als Schnitte entsprechender Ebenenpaare beliebig angenommen werden. Die Geraden $|a_1, a_2, b_1, b_2|$ bilden ein windschiefes Vierseit, indem jede von ihnen nur 2 der übrigen trifft. Man findet nun die übrigen Geraden der Schar $||b||$, wenn man bedenkt, dass die entsprechenden Ebenenpaare der Büschel $|a_1, a_2|$ auf ihren Axen gegenseitig projectivische Punktreihen bestimmen, welche sich in schiefer Lage befinden und dass $|b_1, b_2, b_3|$ 3 entsprechende Punktepaare dieser Reihen bezeichnen. Von massgebender Bedeutung sind jedoch besonders die Parallelstrahlen.

13. Da nämlich die Strahlen der Schar $||b||$ ausser $|a_1, a_2|$ auch die Punktreihe $|a_3|$ schneiden, welche die Beziehung der Büschel $|a_1, a_2|$ vermittelt, so bestimmen auch $|a_1, a_2, a_3|$ auf $|b_1, b_2|$ zwei projectivische Punkt-

reihen, deren Verbindungsstrahlen eine Regelschar $||a||$ bilden. Nun fordert die Stetigkeit des räumlichen Denkens, dass Parallele als Strahlen eines Bündels aufgefasst werden, dessen Mittelpunkt im Unendlichen liegt. Diess zugegeben, schneiden die Parallelen zur Schaar $||a||$ sämmtliche Strahlen derselben, gehören somit zur Schaar $||b||$ und umgekehrt. Die beiden Regelschaaren $||a, b||$ bilden bekanntlich eine Fläche 2. Ordnung, das Hyperboloid, welche die sämmtlichen Strahlen des Raumes zusammenfasst, die 3 einander nicht treffende Geraden schneiden. Zwei Ebenen der Parallelen $|a_2\, a_2'', b_2\, b_2''|$ schneiden sich nun nach der Diagonale des Parallelogrammes, welche durch die Schnittpunkte (B_2', B_2''') der Strahlenpaare $|a_2\, b_2, a_2''\, b_2''|$ bestimmt ist; und da jedes weitere Parallelogramm $|a_2\, b_i, a_2''\, b_i''|$ zwischen denselben Parallelen $|a_2, a_2''|$ liegt, können auch die Schnittdiagonalen $|b_i\, b_i''|$ die erste nur in ihrem Mittelpunkte (M) schneiden. Die Ebenen $[a_i\, a_i'', b_i\, b_i'']$ gehen somit alle durch (M), ihre Spuren theilen $|a_1, b_3|$ projectivisch, diese Ebenen umhüllen daher einen Kegel 2. Ordnung, welcher die Richtungen sämmtlicher Strahlen des Hyperboloides in seiner Spitze zusammenfasst.

14. Der Mittelpunkt (M), wird durch den Schnitt des Strahlenpaares $|B_1'\, B_1''', B_2'\, B_2'''|$ bezeichnet. Wenn $|b_3|$ das Büschel (A_2) durchläuft, so fasst die Ebene $[a_1\, a_2'']$ die Stellungen von $|a_2''|$ zusammen, die Ebenen $[B_1\, b_2'']$ $|| \, |b_1, b_2| \, || \, [B_2\, b_1'']$ die entsprechenden Stellungen von $|b_2'', b_1''|$, die Schnitte $|b_2''|B_2''|a_2''|B_1''|b_1''|$ durchlaufen daher Grade $|b_1''', b_2'''|$, welche mit $[b_1\, b_2''] \, c$ $[a_2\, a_1'']$, folglich auch unter sich parallel sind. Der Ort von (M) ist desshalb $|m|$, welche als Schnitt der Ebenen $[B_1'\, b_1''', B_2'\, b_2''']$ mit $|b_1''', b_2'''|$, mithin auch zu $|c|$ parallel sein muss.

(M) erreicht den unendlich fernen Punkt von $|m|$, wenn $|b_3| \parallel |B_1\, B_2''|$. Dann geht der Richtkegel in ein Ebenenpaar über, welchem die beiden Regelschaaren eines hyperbolischen Paraboloides parallel sind.

15. $|m|$ ist die Gerade durch die Diagonalenmitten des Vierseits $|a_1\, a_2\, b_1\, b_2|$, wie man leicht erkennt, wenn $|b_3|$ in $|A_2\, B_1, A_2\, B_2|$ fällt. Durchläuft $|b_2|$ das Büschel $[B_2\, a_2]$, so beschreibt daher $|m|$ um die Mitte von $|B_2\, B_1'|$ ein Strahlbüschel in der Mittelebene des Vierflaches $[B_1'\, A_2\, B_1\, B_2]$, welche $|a_1, a_2|$ parallel ist, und wird zur Mittellinie, wenn $|b_2|$ mit $|B_2\, A_2|$ zusammenfällt.

16. Hält man $|a_1|$ und (A_2) als Bestimmungselemente der Zeichenebene fest und vorerst auch die Richtung von $|a_2|$, so bezeichnen $|b_1, b_2|$ zwei Ebenenpaare, welche Büschel um $|a_1, a_2|$ beschreiben können und daher eine 4fach unendliche Manigfaltigkeit von Anlagen vertreten. Nimmt man noch die 3 Büschel hinzu, welche $|a_2$ u. $b_3|$ um (A) beschreiben, so erkennt man, dass Fig. 4 als Masszeichen für eine 6fach unendliche Manigfaltigkeit von Regelflächen 2. Ordnung gelten kann. [1])

17. Involutorische Lage. Die beiden projectivischen Strahlbüschel (A_1, A_2) der Fig. 3 theilen jede Gerade ihrer Ebene in zwei projectivische Punktreihen; in den Geraden $|Ty, Tx|$ liegen die entsprechenden Punktepaare beider Reihen verkehrt aufeinander, so dass dasselbe Paar je zwei Punkte des Kegelschnittes bestimmt. Diese involutorische Lage der Punktreihen rührt bei $|Ty, Tx|$ davon her, dass (y, x) beiderseits der Schnitt (T) der Tangenten entspricht, so dass die Strahl-

---

[1]) Dabei bleibt die Erhebung der Geraden über die Zeichenebene unberücksichtigt, weil sie auf die planare Anlage keinen Einfluss hat.

büschel (A_1, A_2) in Bezug auf $|Ty, Tx|$ sich zugleich in Schnittlage befinden, indem die gleichen Strecken $|Ty = yT|$ verkehrt aufeinanderliegen. Da nun das Doppelverhältniss: $|Tyyvz = |yTzv|$, so fällt auch jedes weitere Paar gleicher Strecken $|vz = zv|$ verkehrt aufeinander. Wie Fig. 3 erkennen lässt sind die Punktreihen auf $Ty|$ gleichlaufend und kreuzen sich desshalb nicht; die Punktreihen auf $|Tx|$ dagegen begegnen sich in 2 Punkten, den Schnitten (B, B') dieser Geraden mit dem Kegelschnitte.

18. Polarsystem als Masszeichen. Zwei involutorische Punktreihen bilden ein Punktsystem, welches elliptisch oder hyperbolisch genannt wird, je nachdem die beiden das System bestimmenden Punktepaare sich trennen oder nicht, im letzteren Falle gibt es 2 Doppelpunkte, im ersteren dagegen nicht. Dieselben Ordnungen lassen sich, wie man weiss, auch auf ein Paar concentrischer Strahlbüschel übertragen, welche alsdann ein hyperbolisches oder elliptisches Strahlsystem bilden, von denen das erstere ein Paar Doppelstrahlen besitzt. Befinden sich Strahlsystem und Punktsystem in Schnittlage zu einander, indem die Strahlen des ersteren durch die entsprechenden zu den Punkten des letzteren gehen, so nennt man die Punkte Pole, die denselben involutorisch gegenüberliegenden Strahlen: Polaren. Zwei Punktsysteme bestimmen ein ebenes Polarsystem, wenn sie sich schneiden, und die dem Schnitt beiderseits entsprechenden Punkte zugleich die gegenseitigen Pole sind.

Ein ebenes Polarsystem und der Pol seiner Ebene bestimmen ein Polarbündel.

Ein Polarbündel bestimmt mit einer Ebene und deren Pol ein räumliches Polarsystem.

Durch das Polarsystem werden dort die Punkte und Geraden der Ebene, hier die Punkte und Ebenen des Raumes zusammengefasst.

19. Kegelschnitt als Masszeichen des Polarsystems. Da in den Doppelpunkten, sowie in den Doppelstrahlen je zwei entsprechende Elemente vereinigt sind, so muss bei Schnittlage des Punkt- und Strahlsystemes der Doppelpunkt auf dem entsprechenden Doppelstrahle liegen und umgekehrt.

Der Kegelschnitt ist nun der Ort eines ebenen Polarsystems, in welchem alle Punkte auf ihren entsprechenden Polaren liegen.

Analog ist die Fläche 2. Ordnung im räumlichen Polarsystem der Ort aller Punkte, welche in ihren Polarebenen liegen.

Jede Linie oder Fläche 2. Ordnung bezeichnet daher ein ebenes oder räumliches Polarsystem als dessen Kern.

20. Mittelpunkt. In jedem Punktsystem entspricht dem unendlich fernen ein bestimmter Mittelpunkt, in dem zugehörigen Strahlsystem entspricht alsdann dem Mittelstrahle der Parallelstrahl zu der Geraden, welche Träger des Punktsystemes ist. Wie das Punktsystem durch ein Punktepaar und seinen Mittelpunkt, so ist das zugehörige Strahlsystem durch das entsprechende Strahlenpaar und den Mittelstrahl bezeichnet.

Ein Punktepaar und das zugehörige Strahlenpaar bilden ein Dreieck, in welchem jede Ecke der Pol ihrer Gegenseite ist. Legt man durch zwei solcher Ecken die Mittelstrahlen, welche den unendlich fernen Punkten der Gegenseiten entsprechen sollen, so bezeichnet der Schnitt solcher 2 Strahlen den Pol der unendlich fernen Geraden

der Ebene, welche durch das Dreieck bestimmt wird, den Mittelpunkt des Polarsystemes.

Theilt der Mittelpunkt das Punktepaar, welches die Richtung des Trägers bezeichnet, innerlich, so trennen sich die Punktepaare, das Punktsystem ist daher elliptisch; fällt dagegen der Mittelpunkt ausserhalb der durch das Punktepaar begrenzten Strecke, so umschliessen die Paare des Systemes zwei Doppelpunkte, dasselbe ist desshalb hyperbolisch. Endlich heisst das Punktsystem parabolisch, wenn jene beiden Doppelpunkte mit dem Mittelpunkte zusammenfallen.

Da die polar zugeordneten Strahlsysteme den Punktsystemen gleichartige Strahlenfolgen besitzen, so bezeichnen 2 elliptische Punktsysteme stets ein elliptisches Polarsystem, dessen Mittelpunkt innerhalb des Poldreieckes liegt und welches keine Doppelpunkte, daher auch keinen Kernkegelschnitt enthält. Ist dagegen eines der Punktsysteme hyperbolisch, so fällt der Mittelpunkt des Systemes in einen der 6 Aussenräume, in welche die 3 Polaren die Ebene ihres Dreieckes gliedern.

Die Strahlen eines Systems im Mittelpunkte heissen Durchmesser.

Alle diese Betrachtungen lassen sich auf das Vierflach ausdehnen, welches durch 4 Pole mit deren zugeordneten Polarebenen bestimmt ist, worauf jetzt nicht weiter eingetreten werden soll.

21. Gerade und Punkt als Masszeichen für Kegelschnittbüschel. Zwei Punktsysteme einer Ebene, welche einander im Allgemeinen nicht polar zugeordnet sind, bestimmen ein Kegelschnittbüschel mit 4 Mittelpunkten, wenn beide Systeme hyperbolisch; mit 2 Mittelpunkten, wenn eines von ihnen elliptisch,

ohne reelle Mittelpunkte, wenn beide Punktsysteme elliptisch sind.

Die Fig. 5 stellt den 2. dieser 3 Fälle dar, welcher die beiden anderen sinnbildlich vertritt.

Dem Schnitt (A) entsprechen (A_1, A_2) in dem einen und anderen der beiden Punktsysteme, so ist $|A_1 A_2|$ die Polare von (A), durch welche die beiden Systeme aufeinander bezogen werden. Auf der Polaren $|A_1 A_2 = a|$ bezeichnen je zwei Pole (B_1', B_2') zu $|AA_1 = a_1, AA_2 = a_2|$ mit (A_1, A_2) ein Punktsystem. Die Verbindungslinien $|B_1' m_1, B_2' m_2|$ mit den Mittelpunkten von $\|a_1, a_2\|$ ergeben den Mittelpunkt (M_i) des entsprechenden Polarsystemes, durch welchen auch der Mittelstrahl des Polarbüschels $((A))$ gehen muss.

22. Zur weiteren Vermittelung der polaren Beziehungen wird durch (A) ein Kreis [o] gelegt, welcher $|a_1, a_2|$ in (α_1, α_2) und den Parallelstrahl zu $|a|$ in (α) schneide. Die Strahlen $|AB_1', AB_2'|$ treffen den Kreis [o] in (β_1, β_2); dann sind $|\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2|$ zugeordnete Strahlenpaare eines Polarbüschels $((\pi_i))$ in Bezug auf [o]. Dem Strahlsystem $A \, \|a_1 B_1, a_2 B_2\|$ gehört auch der Parallelstrahl zu $|a|$ und der demselben zugeordnete Mittelstrahl $|m_\alpha|$ an. Fällt nun (B_1') nach (A_2), so wird die Sehne $|\alpha_1 \beta_1|$ zu $|\alpha_1 \alpha_2|$; und ist (μ_α) die Marke des entsprechenden Mittelstrahles $|m_\alpha|$ auf [o], so ergibt sich $|\alpha_1 \alpha_2| \, \pi \, |\alpha \mu_\alpha|$ als Pol zu [o] für das Strahlsystem $((A))$. Befindet sich (π) ausserhalb [o], so zeigen die Tangenten aus diesem Punkt auf dem Kreis [o] mit den Berührungspunkten zugleich die Doppelstrahlen des Systemes $((A))$, welche den Kegelschnitt berühren, der durch das Polarsystem $[[AA_1 m_1, AA_2 m_2]]$ bezeichnet ist.

Sollen sich (B_1', B_2') auf $|A_1 A_2|$ so verschieben, dass

sie stets mit diesen festen Punkten ein bestimmtes Punktsystem bilden, so müssen sie projectivische Punktreihen durchlaufen, folglich die Büschel A (β_1, β_2), somit auch ($\alpha_1\, \beta_1$, $\alpha_2\, \beta_2$) projectivisch sein und, weil in $|\alpha_1\, \alpha_2|$ entsprechende Strahlen zusammenfallen, sich in Schnittlage befinden; der Ort von (π) daher eine Gerade sein, welche durch den Schnitt (Π) der Tangenten zu (α_1, α_2) geht, da diese dem Fall entsprechen, wo (B_1') mit (A_1) und (B_2') mit (A_2) zusammenfällt.

Auch die Strahlbüschel ($m_1\, B'_1$, $m_2\, B_2'$), sowie die zu diesen Parallelen A (μ_1, μ_2) sind projectivisch, mithin auch ($\alpha_1\, \mu_1$, $\alpha_2\, \mu_2$). Den Strahlen $|m_1\, B_1'$, $m_2\, B_2'|$ sind in jedem Strahlsystem des Mittelpunktes (M) Parallelstrahlen zu $|a_1$, $a_2|$ zugeordnet; wird also $|m_1\, B_1'| \parallel |a_2|$, so muss der conjugirte Durchmesser im Strahlsystem ((M)) $\parallel |a_1|$ durch (m_2) gehen.

In diesem Falle gelangt daher (μ_1) nach (α_2) und gleichzeitig (μ_2) nach (α_1), woraus erhellt, dass sich auch die Büschel ($\alpha_1\, \mu_1$, $\alpha_2\, \mu_2$) in Schnittlage befinden. Das Strahlsystem, welches der Schnitt $|\alpha_1\, \mu_1|$ m $|\alpha_2\, \mu_2|$ in Bezug auf [o] bestimmt, ist nun dem Strahlsystem projectivisch, welches dem entsprechenden Mittelpunkt im Polarsystem des Kegelschnittes zugehört.

(Π) entspricht auch für die Büschel ($\alpha_1\, \mu_1$, $\alpha_2\, \mu_2$) den Strahlen $|m_1\, A_1$, $m_2\, A_2|$, daher befinden sich $|\pi$, m$|$ in Schnittlage; aus früherem erhellt, dass (α) der Mittelpunkt des projicirenden Büschels sei.

|m| zeigt die Gliederung des Kegelschnittbüschels an: den Schnitten |m| mp [o] entsprechen die beiden Parabeln desselben, (m$_\infty$) die gleichseitige Hyberbel; (m$_i$) die Ellipse, welche dem Kreis am nächten steht oder deren Axen die Winkel der beiden Parabelaxen hälften.

Es gibt immer zwei Punktreihen $|m_1, m_2|$ auf $|a_1, a_2|$, welche so liegen, dass die Büschel $(A_1\, m_2, A_2\, m_1)$ einen gegebenen Strahl $|A\, \mu|$ zum Schnitte haben; der Ort der entsprechenden (m) ist in solchem Falle $|\alpha \mu \pi|$; folglich ist die Lage von $|\Pi \mathrm{m}|$ nicht weiter von der Lage der $|\Pi \pi|$ abhängig.

Fasst man die Büschel der Strahlen $|\Pi \pi, \Pi \mathrm{m}|$ als zweifache Mannigfaltigkeit auf, so sind nach dem Vorigen die Reihen $|m_1, m_2|$ inbegriffen und bleiben noch die Büschel der Strahlenpaare $|a_1, a_2|$ zu zählen.

Die Fig. 5 zeigt also, (A) und $|a|$ als Bestimmungselemente der Ebene aufgefasst, eine 4fache Mannigfaltigkeit von Kegelschnittbüscheln, von denen jeder zugleich eine Reihe Polarsysteme vertritt.

Auch Fig. 5 kann, wie Fig. 3, als Projection eines Ebenenbüschels $|A_1\, A_2|$ aufgefasst werden.

Ein analoges Masszeichen lässt sich für Kegelschnittschaaren gewinnen.

23. Kegelschnitt als Masszeichen für Büschel von Flächen 2. Ordnung. Ein Paar Flächen 2. Ordnung hat im Allgemeinen ein Curve 4. Ordnung gemein. Diese kann in ein Ebenenpaar zerfallen.

Weitläufigkeit zu vermeiden legen wir diesen einfacheren Fall zu Grunde. Der Kreis $|\alpha|$ sei die gemeinsame Leitlinie zweier Kegelflächen; (A) sei die Spur der Verbindungsgeraden $|A_1\, A_2|$ ihrer Spitzen in der Ebene des Kreises $[\alpha]$, welche zugleich die Zeichenebene ist. Die Fig. 6 zeigt in $[B_1\, b_1]$ einen Zweig der Hyperbel, nach welcher die Kegelflächen $||A_1, A_2|$ sich schneiden und deren Ebene in (B) von $|a|$ getroffen wird, d. h. in dem harmonisch zugeordneten Punkte zu (A) in Bezug

auf die Schnitte (A_1, A_2) der Gegenseiten $|A_1 a_1, A_1 a_2; A_2 a_1, A_2 a_2|$ eines Vierseites.

Eine F. $(^2)$, welche die Kegelschnitte $[\alpha, \beta]$ mit dem Kegelpaare gemein hat, geht auch durch die Ecken $(a_1, a_2; b_1, b_2)$ jenes Vierseits. Das Kegelschnittbüschel dieser 4 Mittelpunkte zeigt daher die Flächen 2. Ordnung an, welche mit dem Kegelschnitt $[\alpha]$ und dem Knotenpaare (A_1, A_2) gegeben sind.

Die Tangentenpaare eines solchen Kegelsbhnittbüschels schneiden sich auf $|A_1 A_2|$, bestimmen auf derselben ein Punktsystem mit den Doppelpunkten (A_1, A_2) und sind zugleich die Pole der Ebenen $[a, b]$, indem das Punktsystem $((A_1 A_2))$ für alle Ebenen des Büschels $|A_1 A_2|$ dasselbe bleibt. Diese Axe enthält somit auch die Pole sämmtlicher Ebenen des Büschels $|m B_1|$, sowie umgekehrt diese Gerade die Pole des Büschels $|A_1 A_2|$; $|A_1 A_2, m B_1|$ sind folglich zugeordnete Gerade aller Polarsysteme der Flächen 2. Ordnung, welche durch $[\alpha, \beta]$ gehen.

Die Lothebene durch $|A_1 A_2|$ geht durch den Mittelpunkt des Systemes $||m B_1||$, ist daher eine Mittelebene und enthält die Mittelpunkte sämmtlicher Flächen des Büschels $[\alpha, \beta]$. Der Ort jener Mittelpunkte ist ein Kegelschnitt, $[\mu]$, bestimmt durch die Mittelpunkte (M_a, M_b) der Kegelschnitte $[\alpha, \beta]$ und das Punktsystem $((A_1, A_2))$.

Das Punktsystem auf einem Strahle $|M_a\ x|$ des Büschels (M_a) in der Mittelebene $[m\ A_1\ A_2]$ ist elliptisch und besitzt keine Doppelpunkte, wenn der Schnitt $|M_a x|$ $\mathfrak{m}\,[\mu]$ zwischen (M) und $|A_1 A_2|$ liegt. Dann geht kein Zweig des Kegelschnittes in $[m\ A_1\ A_2]$ von (a_3) nach (a_4), dieser ist desshalb eine Hyperbel. Ist dagegen das Punktsystem auf $|M_a\ x|$ hyperbolisch, so wird der Kegelschnitt über $|a_3\ a_4|$ Hyperbel, wenn die Doppelpunkte von $||M_a x, \mathfrak{m}||$

auf derselben Seite von $|a_3 a_4|$ liegen, im andern Falle dagegen wäre der fragliche Kegelschnitt eine Ellipse.

Die Kegelschnitte $[\alpha, m A_1 A_2]$ bezeichnen die Gestalt der Fläche 2. Ordnung. In vorliegendem Falle z. B. enthält das Büschel $[\alpha, \beta]$ nur ein- und 2mäntelige Hyperboloide, was im Allgemeinen schon dadurch angezeigt wird, dass $[\alpha]$ Ellipse, $[\beta]$ Hyperbel ist, wodurch das Ellipsoid und hyp. Paraboloid ausgeschlossen sind, da jenes keine hyperbolischen, dieses keine elliptischen Schnitte enthält. Das elliptische Paraboloid aber ist im vorliegenden Falle desshalb unmöglich, weil der Mittelpunktskegelschnitt $[\mu]$ keinen Punkt im Unendlichen hat.

Da $(A_1 A_2)$ die Gerade $|A B|$ harmonisch theilen, so entsprechen jedem (B) zwei Reihen harmonischer Punkte und der Punktreihe $|A B|$ daher eine doppelte Mannigfaltigkeit von Punktepaaren (A_1, A_2). Das Strahlenbündel (A) enthält eine doppelte Mannigfaltigkeit von Punktreihen. $|A B|$; das Strahlbüschel der Durchmesser endlich eine zweifache Mannigfaltigkeit von Punktreihen $|A M_\alpha|$.

Folglich stellt Fig. 6 den Kegelschnitt als Masszeichen für eine 8fache Mannigfaltigkeit von Flächen 2 Ordnung dar.

24. Ueberblick. Unsere Tafel zeigt den Massraum in 3facher Weise gegliedert:

I. Durch Linien und Flächen:

Fig. 1. Ein Punktepaar und eine Kreis um dessen Mittelpunkt als Masszeichen für die Kegelschnitte, welche die Punkte zu Brennpunkten und den Durchmesser zur Axe haben.

Fig. 2. Ein Rotationskegel als Masszeichen für seine ebenen Schnitte und die Rotationshyperboloide, welche seinen Erzeugungslinien parallel sind.

II. Durch Büschel von Linien und Flächen.

Fig. 3. Ein Dreieck als Masszeichen einer zweifachen Mannigfaltigkeit von Kegelschnitten, welche durch seine Ecken gehen.

Fig. 4. Eine Gerade und ein Punkt als Masszeichen einer 6fachen Mannigfaltigkeit von Regelflächen 2. Ordnung, welche jene Elemente enthalten.

III. Durch Gruppen von Polarsystemen.

Fig. 5. Eine Gerade und einen Punkt als Masszeichen für eine 4fache Mannigfaltigkeit von Kegelschnittbüscheln, von denen jedes eine Reihe ebener Polarsysteme vertritt.

Fig. 6. Ein Kegelschnitt als Masszeichen für eine 8fache Mannigfaltigkeit von Flächen 2. Ordnung, von denen jede ein räumliches Polarsystem vertritt.

So stellt jede Stufenfolge geometrischer Figuren, diese letzteren als Masszeichen aufgefasst, eine Gliederung des Massraumes dar. Wie der Massstab die Grössenverhältnisse der Gegenstände in Längeneinheiten zusammenfasst, so fasst der Massraum die Weisen gegenseitiger Abhängigkeit von Lagen- und Grössenverhältnissen in Masszeichen zusammen. Darum ist der Massraum eine Erweiterung des Massstabes.

Hottingen-Zürich, 1. Jan. 1887.

Notizen.

Zur Biographie von Joseph Morstadt. — Als ich zur Zeit meine „Geschichte der Astronomie“ schrieb, wünschte ich auch über den mehrfach verdienten Joseph Morstadt einige Notizen beifügen zu können, — wandte mich desshalb an den seither verstorbenen Professor Carl Hornstein in Prag, — und erhielt dann wirklich alsbald von ihm in einem vom 6. Juni 1876 datirten Briefe die gewünschten Anhaltspunkte, um auf pag. 716 meines Werkes eine jenen Mann betreffende kurze Anmerkung beifügen zu können. Als ich sodann fast ein Decennium später durch Freund Günther in Ansbach um weitere Notizen über Morstadt zu Gunsten eines ihn betreffenden Artikels für die „Allgemeine deutsche Biographie“ angegangen wurde, hatte ich nur noch eine dunkle Erinnerung an jenen Brief, und als diese nach und nach wieder etwas auflebte, fand ich den Brief nicht mehr. Erst lange nachher kam mir der Gedanke, dass ich Letztern in die von mir in den Vierziger-Jahren für die Schweiz. naturf. Gesellschaft angelegte und seither durch Herrn Bibliothekar Koch fortgeführte Autographensammlung abgegeben haben möchte, — und dort fand er sich denn wirklich vor. Da er mehrere Angaben enthält, welche ich früher des engen Raumes wegen nicht benutzen konnte, so halte ich es für angegeben das Versäumte nachzuholen, und den ohnehin kurzen Brief in extenso abdrucken zu lassen. Der sel. Hornstein schrieb mir damals: „Ich erlaube mir nachstehend Alles mitzutheilen, was ich theils aus den Akten der Universität, theils aus dem Archive der böhmischen Statthalterei, theils endlich von Verwandten Morstadt's über Letztern zu eruiren in der Lage war: Joseph Morstadt (der zweite Vorname war nicht zu ermitteln) ist geboren zu Kolin in Böhmen am 13. Februar 1797. Seine Aeltern waren Joseph und Klara Morstadt, Bürger und Grundbesitzer in Kolin. Morstadt kam an die Prager Universität im Jahre 1815, studirte zwei Jahre an der philoso-

phischen, dann drei Jahre (bis 1820) an der juridischen Facultät, und erhielt im Jahre 1830 seine erste Anstellung bei dem hiesigen Gubernium (seit 1848 „Statthalterei" genannt). Im Jahre 1846 wurde er Kreiscommissär des Czaslauerkreises in Böhmen, 1856 Statthalterei-Secretär in Prag. Später erhielt er den Titel „Kaiserlicher Rath". Er starb am 7. August 1869 an Herzlähmung im 73. Lebensjahre, auf einer Erholungsreise begriffen, zu Lichtenwald in Steyermark." [R. Wolf.]

Auszüge aus den Sitzungsprotokollen.

Sitzung vom 8. November 1886.

1. Herr Bibliothekar Dr. Ott legt folgendes Verzeichniss der seit der letzten Sitzung eingegangenen Schriften vor:

A. Geschenke.

Von Herrn Prof. A. Kölliker in Würzburg:

Kölliker, A., Ueber den feinern Bau des Knochengewebes.
— Das Karyoplasma und die Vererbung (eine Kritik).

Von Herrn Friedr. Goppelsrœder:

Goppelsroeder, F., Ueber die Darstellung der Farbstoffe.
— Untersuchungen von Milch.

Von der botanischen Gesellschaft in Glarus.

Heer, O., Die Pflanzenwelt des Kantons Glarus.

Vom Fries'schen Fond:

Topographischer Atlas der Schweiz. Lief. 29.

Von Herrn Prof. R. Wolf:

Vierteljahrsschrift der naturf. Gesellschaft. Jahrg. 31, Heft 2.
Astronomische Mittheilungen Nr. 67.
Marie, M., Histoire des sciences math. et phys. Tome IX.

Von Herrn Friedr. Küchenmeister:

Küchenmeister, F., Die Finne des Bothryocephalus und ihre Uebertragung auf den Menschen.

Von Herrn Gärtner Bächtold in Andelfingen:

Der erfahrene Führer in Haus- und Blumengarten. Jahrg. II. Nr. 8—12.

Von Herrn Prof. G. Schoch:

Schoch, G., Orthoptera Helvetiæ nebst Zusätzen und Berichtigungen zur Fauna neuropterorum Helvetiæ.

Von der geographischen Gesellschaft in Greifswalde:

Excursion derselben nach der Insel Bornholm.

Von Herrn Prof. C. Schübeler in Christiania:

Viridarium Norwegicum: Norges væxtrige. Bd. 1.

Von Herrn Amund Helland in Christiania.

Helland, A., Lakis Kratere og lavastrœmme. 4°. 1886.

Von Herrn M. L. Brämer in Toulouse.

Penk, A., La période glaciaire dans les Pyrénées. 8° 1885.

Von Herrn Director E. v. Regel in Petersburg.

Regel, E. v., Descriptiones et emendationes plant. novarum. — Monographia generis „Eremostachis".

Vom naturhistorisch-medizinischen Verein zu Heidelberg.

Festschrift z. Feier des 500jähr. Bestehens der Ruperto-Carola.

B. In Tausch gegen die Vierteljahrsschrift:

Zeitschrift der deutsch. geolog. Gesellschaft. Bd. 38. Heft 1, 2.
Industriezeitung von Riga. Jahrg. XII. Nr. 10—18.
Schriften d. naturforsch. Gesellschaft in Danzig. Band 6. Heft 3.
Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XX. Nr. 5.
Liste alphabétique de la correspondance de Christ. Huygens. 4° Harlem 1886.
Atti della reale accademia dei Lincei. IV. Serie. Vol. II. Nr. 12—14. II. Semestre, Nr. 1—7.
Bulletin de la société des sciences de la Basse-Alsace. Tome 20, Nr. 6—10.
Bolletino delle opere moderne straniere. 1886. Nr. 1, 2.
Boletim da sociedade de geographia de Lisboa. 5. Ser. Nr. 9. 10.
Proceedings of the geograph. soc. of London. Vol. 8. Nr. 7—11.
Mittheilungen des naturw. Vereins für Steiermark für 1885.
Sitzungsberichte der Berliner Akademie Nr. 1—39 für 1886.
Proceedings of the american association. Meeting 33 d 1884.
Bulletin of the California academy of sciences Nr. 4.
Proceedings of the academy of natural science of Philadelphia. 1885 Part 3. 1886 Part 1.

Smithsonian Report for 1884.
Annual Report U.-St. geological survey 1883/84.
Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft in Leipzig. Jahrg. 21. Heft 1—3.
Schriften d. physik.-ökonom. Gesellschaft in Königsberg. Jhrg. 26.
Atti della società Toscana di science naturali. Vol. V.
Memoirs of the geological survey of India. Series X. Vol. 3, 4. Series XIII. 1 und 5.
Leopoldina. Heft XXII. Nr. 9—16.
Neues Lausitzisches Magazin, Band 62. Heft 1.
Preisschriften der fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft Nr. IX.
Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie. 8. Serie. Deel VI.
Bollettino della società Veneto-Trentina. Tomo III, Nr. 4.
Annalen d. k. k. Universitäts-Sternwarte in Wien. Band 2 & 3.
Abhandlungen der senkenbergischen naturforschenden Gesellschaft. Band 14. Heft 1.
Boletin de la academia nacional de ciencias en Córdoba. Tome VII. Nr. 1—4 und Tome VIII Nr. 1—3.
Actas de la academia nacional de ciencias en Córdoba. 4°. Tome V. Nr. 1 und 2.
Schriften der neurussischen Gesellschaft der Naturforscher zu Odessa. Bd. 10 mit Beilage.
Bulletin de la société belge de microscopie, année 12, Nr. 9.
Proceedings of the zoolog. soc. of London for 1886. Part 1 & 2.
Mittheilungen d. k. k. geogr. Gesellschaft in Wien 1885. Bd. 28.
Bulletin de la soc. imp. des naturalistes de Moscou pour 1886. Nr. 1.
Journal of the Cincinnati soc. of natural history for 1886.
Verhandlungen der k. k. zoolog-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 36. Nr. 1, 2.
Journal de l'école polytechnique. Cahier 55.
Mémoires de la soc. des sciences de Bordeaux. Tome 1. Tome 2. Nr. 1. 3ième Série
Observations de la Commission météorolog. d. l. Gironde. 1883/84.
Mémoires de la soc. d'émulation de Montbéliard. Vol. 6. de la 3ième Série.
Bulletin de la société des sciences de Nancy. 2ième Série. Tome 7. Fasc. 18.

Mémoires de la soc. d'émulation du Doubs. 5. Série. Vol. 9. 1884.
Nachrichten von der k. Gesellschaft d. Universität zu Göttingen für 1885. Nr. 1—13.
Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwiss. Kenntnisse in Wien. Bd. 26.
Acta horti Petropolitani. Tomus IX., fasc. II.
Bulletin of the museum of comparative zoology. Vol 12. Nr. 5.
Mittheilungen des Vereins d. Aerzte in Steiermark. Bd. 22. 1885.
Atti della soc. italiana di scienze naturali. Vol. 28.
Zeitschrift für Naturwissenschaften v. Halle. 4. Folge. V. Bd. Heft 2. 3.
Veröffentlichungen d. grossherz. Sternwarte zu Karlsruhe. Heft 2.
Annalen d. k. k. Hofmuseums in Wien. Bd. 1. Nr. 3.
Transactions of the seismological soc. of Japan. Vol. 9.
Sitzungsberichte d. naturforsch. Gesellschaft z. Leipzig f. 1885.
Sitzungsberichte d. naturf. Gesellschaft „Isis" für 1886. Part. 1.
Recueil des mémoires et des travaux de la soc. bot. de Luxembourg. Nr. XI. 1885/86.
Report of the Jowa Weather Service for 1883.
Records of the geological survey of India. Vol. XIX. Part. 3.
Boletim da sociedade geographia de Lisboa. 5. Serie. Nr. 11. 12. 6. Serie. Nr. 1. 2.
Festschrift d. Vereins für Naturkunde zu Cassel.
Mittheilungen der thurgauisch. naturforsch. Gesellschaft. Heft 7.
Mittheilungen a. d. Verein d. Naturfr. i. Reichenberg. Jahrg. 17.
Schriften d. naturwissenschaftl. Vereins f. Schleswig-Holstein. Bd. VI. Heft 2.
Bulletin of the U.-St. geolog. Survey Nr. 24—26.
U.-St. geolog. survey by Powell. Monographs Nr. IX.
Publications of the Washburn Observatory IV. 1885.
Observations, astronomical and meteorolog., of Washington. Vol. 29. 1882.
Observations, astronomical, of Edinburgh. Vol. XV. 1877—1886.
Bulletin de la soc. belge de microscopie. Année X. Nr. 10.
Journal of the Linnean soc. Zoology. Nr. 109—113.
„ „ „ „ „ Botany. Nr. 138—144 und Nr. 150.
Archief, nederlandsch kruitkundig. II. Serie. Deel 4. Stuck 4.
Transactions of the New-York academy of sciences. Vol. V. Nr. 2—6.

Annals of the New-York academy of sciences. Vol. III. Nr. 9.
Jahrbücher des nassauischen Vereins für Naturkunde. Jahrg. 39.
Jahresbericht, 63., der schles. Gesellschaft, mit Ergänzungsheft.
Verhandlungen des naturhist. Vereins der preuss. Rheinlande. Jahrg. 43. 1. Hälfte.
Bericht d. naturwissenschaftl. medizinischen Vereins in Innsbruck. Jahrg. XV.
Mittheilungen aus dem Jahrbuch d. k. ungar. geolog. Anstalt. Bd. VIII. Heft 1. 2. und 7. Separatauszug: Scabo. Páleffy. Noth. Kerpely. Obach, Szüts und Soltz.
Földtani Közlöny. Vol. 16. Nr. 1—6.
Bulletin de l'académie imp. des sciences de St. Pétersbourg. Tome XXX. Nr. 4.
Bericht der senkenbergischen naturforsch. Gesellschaft für 1886.
Bulletin de la soc. vaud. des sciences nat. 3. Sér. Vol. 22. Nr. 94.
Journal of the R. geolog. soc. of Ireland. New. S. Vol. 7. Part 1.
Den Norske Nordhavs Expedition 1876—1878. Zoologi. Vol. 15.
Atti della società dei naturalisti di Modena. III. Serie, Vol. 3.

C. Anschaffungen.

Nägeli & Peter, Die Hieracien Mittel-Europa's. Bd. 2. Heft 1 und 2.
Liebig's Annalen der Chemie. Nr. 233. Heft 2. 3. Nr. 234. Heft 1—3. Nr. 235. Heft 1—3.
Wetterberichte der schweiz. met. Centralanstalt Nr. 173—310.
Gazzetta chimica italiana. Anno XVI. Nr. 3—6.
Tschermak. Mineralogische und petrograph. Mittheilungen. Bd. 7. Heft 5. 6.
Beiträge zur geol. Karte d. Schweiz. Lief. 24 mit Atlas. 1. Theil.
Recueil zoologique suisse par Fol. Tome III. Nr. 3. 4.
Biologisches Centralblatt. Bd. 6. Nr. 8—16.
Journal de physique. II. Série. Tome V. Nr. 6—10.
Zeitschrift, elektrotechnische. Jahrg. 7. Nr. 6—10.
Mémoires de l'académie de St. Pétersbourg. VII. Série. Tome 34. Nr. 2—4.
Oeuvres de Lagrange. Tome 8 et 9.
Jahrbuch d. schweizer. Alpenklubbs sammt Register u. Atlas. Jahrg. 21.

Annuaire du club alpin français. Année 12.
Flora italiana pr. Parlatore. Vol. VI. Part. 3.
Acta mathematica red. v. Mittag-Leffler. Vol. 8. Nr. 3. 4.
Rabenhorst. Kryptogamen-Flora. 1. Bd. 2. Abth. Lief. 23—25.
Atlas der Diatomaceen-Kunde v. A. Schmidt. Heft 25 und 26.
Gazzetta chimica italiana. Vol. 11. 12.
Transactions of the entomological soc. of London 1886. Part 2.
Zeitschrift f. wissenschaftl. Mikroskopie v. Behrens. Bd. 3. Heft 2.
Grashof, Theoretische Maschinenlehre. Bd. 3. Lief. 2.
Quatrefages & Hamy: Crania ethnica. Liv. 6. 7. 10 et 11. Schluss.
Jahresbericht über die Fortschritte d. Chemie für 1884. Heft 3.
Jacobi, C. G. J., Gesammelte Werke. Bd. 4.
Palaeontolog. Abhandlungen v. Dames & Kayser. 3. Bd. Heft 3.
Transactions of the zoological soc. of London. Vol. XII. Part 3.
Philosophical transactions of the royal soc. of London. Vol. 171. Nr. 1—3. Vol. 173. Nr. 1. 2.
Thomsen, J., Thermochemische Untersuchungen. Bd. 1—4.
Joule, J. P., Scientific papers. Vol. 1.
Archives néerlandaises des sciences exact. et nat. Tome 21. Nr. 1.
Masters Maxwell, T., Pflanzen-Teratologie.
Heldreich, Th., Die Nutzpflanzen Griechenlands.
Jahresbericht d. zoolog. Station in Neapel für 1885. Abth. III.
Alpine journal. Vol. 13. Nr. 93.
Latzel, R., Die Myriopoden der österr.-ungar. Monarchie. 8°. Wien 1880—1884.
Heurek, H., Synopsis des Diatomées de Belgique. Text & Atlas.
Häckel, E., Entwickelungsgeschichte der Siphonophoren.
Nova acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis. 3. Series. Vol. 13. Pars 1.
Mémoires nouveaux de la soc. imp. des naturalistes de Moscou. Tome XV. Part. 4.
Beiträge zur Paläontologie Oesterreich-Ungarns und des Orients. Bd. V. Heft 3.
Report of the scientif. results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger 1873—1876 Zoologie. Vol. 11—16.
Publication des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. 1—5.

2. Da Herr Escher-Hess die auf ihn gefallene Wahl zum Vizepräsidenten ablehnt, wird Herr Prof. Dr. Schröter gewählt.

3. Die Gesellschaft beschliesst, den erheblichen Vorrath älterer Neujahrsstücke, welchen die Bibliothek besitzt, den Mitgliedern zum Kauf anzubieten.

4. Herr John Lehmann meldet sich als Candidat zur Aufnahme in die Gesellschaft.

5. Herr Prof. Dr. Bühler hält einen Vortrag: „Der Einfluss des Waldes auf das Klima".

6. Herr Dr. Keller weist Bruchstücke eines Ei's von Aepiornis maximus vor.

Sitzung vom 22. November 1886.

1. Herr Bibliothekar Dr. Ott legt folgendes Verzeichniss der seit der letzten Sitzung eingegangenen Schriften vor:

A. Geschenke.

Von Herrn Prof. A. Heim:

Jaquet, M., Recherches sur le système vasculaire des annélides.
Fulliquet, G., Recherches sur le cerveau du protopterus annectens.
Meuron, P. de, Recherches sur le développement du thymus et de la glande thyroide.

Von Herrn Prof. J. J. Egli:

Scheerer, Th., Löthrohrbuch. 8°. Braunschweig 1857.
Delabar: Der Foucault'sche Pendelversuch. 8°. St. Gallen 1855.

B. In Tausch gegen die Vierteljahrsschrift:

Jahresbericht, 7., d. Annaberg-Buchholzer-Vereins für Naturkunde 1883—1885.
Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. 8. Theil. Heft 1.
Bulletin de la soc. belge de microscopie. Année 9. Nr. 8. Année 11. Nr. 1—3, 5—9, 11, 12. Année 12, Nr. 2—8.
Annales de la soc. belge de microscopie. Tome 7, 9, 10.
Leopoldina. Heft 22. Nr. 17, 18.
Abhandlungen der math. physikalischen Klasse d. k. sächsisch. Ges. Bd. 13. Nr. 6 & 7.
Bulletin of the museum of comp. zoology. Vol. 12. Nr. 6.
Journal of the Cincinnati soc. of nat. history. Vol. 9. Nr. 3.
Industriezeitung von Riga. Jahrg. 12. Nr. 19.
Boletim da soc. de geographia de Lisboa. 6. Serie. Nr. 3 u. 4.

Boletin de la academia nacional de ciencias en Cordoba. Tome VIII. Nr. 4.

Mathematische und naturwissenschaftl. Berichte aus Ungarn v. J. Fröhlich. Bd. 2 und 3.

László, Chemische Analyse ungarländischer Thone.

Buday, Die sekundären Eruptivgesteine des Persányer-Gebirges.

Jnkey, Nagyág und seine Erzlagerstätten.

Hermann, Urgeschichtliche Spuren in den Geräthen d. ungarisch. volksthümlichen Fischerei.

Daday, Morphologisch-physiolog. Beiträge zur Kenntniss der Hexarthra polyptera.

Hegyfoky, Die meteorologischen Verhältnisse d. Monats Mai in Ungarn.

Haszlinszky, Flora muscorum Hungariæ.

Catalogus bibliothecæ Regiæ Societatis Hungaricæ scientiarum naturalium. Fasc. II.

Bericht über die Thätigkeit der naturforsch. Ges. in Solothurn 1884—1886.

Korrespondenzblatt des Naturforscher-Vereins in Riga.

C. Anschaffungen.

Liebigs Annalen der Chemie. Bd. 236. Heft 1, 2.

Thomson, Sir W., Mathematical and physical papers. Vol. 2.

Wetterberichte der schweiz. met. Centralanstalt Nr. 311—323.

Transactions of the entomological society of London for 1881. Part 2—4.

Biologisches Centralblatt. Bd. 6. Nr. 17.

Gazzetta chimica italiana. Anno XVI. Fasc. 7.

Acta mathematica red. v. Mittag-Leffler. Vol. IX. Nr. 1.

Mineralogische u. petrographische Mittheilungen v. Tschermak. Bd. 8. Heft 1 und 2.

Proceedings of the scientific meetings of the zoolog. soc. of London. 1886. Part 3.

2. Herr John Lehmann wird einstimmig als Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

3. Herr Dr. E. Vinassa meldet sich als Candidat zur Aufnahme in die Gesellschaft.

4. Herr Dr. Imhof hält einen Vortrag: „Das mikroskopische Thierleben in Alpenseen, nach eigenen Untersuchungen.“

5. Herr Prof. Dr. Schröter weist Proben von vegetabilischer Seide und Wolle vor.

Sitzung vom 6. December 1886.

1. Herr Bibliothekar Dr. Ott legt folgendes Verzeichniss der seit der letzten Sitzung eingegangenen Schriften vor:

A. Geschenke.

Von Herrn Bächtold, Gärtner in Andelfingen:

Der erfahrene Führer im Haus- und Blumengarten. Jahrg. 3. Nr. 1.

Von Herrn Prof. Dr. A. Mousson:

Naturkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie. Deel 42—44 und Catalogus der Bibliothek.

Vom Comité international des poids et mesures.

Procès-Verbaux. 1883—85.

Vom Tit. eidgenössischen Ober-Bauinspectorat in Bern:

Hydrometrische Beobachtungen für 1886. Rhein a b, Aare a b und Reuss, Limmat, Rhone und Tessin.

Vom Institut météorologique des Pays-Bas.

Nederlandsch meteorologisch Jaarboek voor 1885.

B. In Tausch gegen die Vierteljahrsschrift:

Travaux et mémoires du bureau internat. des poids et mesures. Tome V.

Leopoldina. Heft 22. Nr. 19, 20.

Actes de la soc. helvét. des sciences nat. (session 69) à Genève.

Compte rendu des travaux de la même soc. (session 69) à Genève.

Bulletin de l'acad. imp. des sciences de St. Pétersbourg. Bd. 31. Nr. 2.

Mémoires de l'acad. des sciences de Montpellier. Tome VI. Nr. 1.

Records of the geolog. survey of India. Vol. XIX. Part 4.

Jahrbuch d. k. k. geolog. Reichsanstalt, Bd. 36. Heft 2 und 3.

Verhandlungen derselben. Nr. 5—12.

Abhandlungen derselben. Bd. 12. Nr. 1—3.

Industrie-Zeitung von Riga. Jahrg. 12. Nr. 20.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Jahrg. 29.

Atti della reale acad. dei Lincei. IV. Serie. Vol. 2. Nr. 8.

Annalen d. k. k. naturhistorischen Hofmuseums in Wien. Bd. 1. Nr. 4.

C. Anschaffungen.

Bulletin de la soc. mathémat. de France. Vol. 1. Nr. 4. Vol. 3. Nr. 4 et 5. Vol. 7. Nr. 5
Zeitschrift, elektro-technische. Jahrg. 7. Heft 11.
Zeitschrift für wissenschaftliche Mikroskopie. Bd. 3. Heft 3.
Archives du Musée Teyler. II. Série. Vol. 2, Nr. 4 et Catalogue.
Wetterberichte der schweiz. met. Centralanstalt Nr. 312—35.
Biologisches Centralblatt. Bd. 6. Nr. 18.
Journal de physique pr. Almeida. II. Série. Tome V. Nr. 11.
Berichte der deutsch. chemischen Gesellschaft. Jahrg. 10. Nr. 4 und Register.
Berichte der deutsch. chemischen Gesellschaft. Jahrg. 11. Nr. 2—18 und Register.
Forschungen zur deutschen Landes- und Volkskunde. Bd. 1 u. 2. Heft 1.
Archives italiennes de Biologie. Bd. 1—6 u. Bd. 7. Fasc. 1 u. 2.

2. Herr Dr. Vinassa wird einstimmig als Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

3. Es wird eine Einladung der naturforschenden Gesellschaft in Bern zur Feier ihres 100jährigen Jubiläums verlesen und Herr Prof. Schär als Delegirter bezeichnet.

4. Herr Prof. Heim hält einen Vortrag: „Zustände des Trinkwasserbezuges und deren Verhältniss zu Krankheiten.“

Sitzung vom 20. December 1886.

1. Herr Graberg hält einen Vortrag: „Der Massraum, eine Erweiterung des Massstabes.“

2. Herr Prof. Schär macht Mittheilungen mit Vorweisungen verbunden, über die Gewinnung von Kautschuk und Guttapercha.

Am 11. Dez. hat die Gesellschaft unter Führung der Herrn Prof. Hantzsch und Lunge das neue chemische Laboratorium des eidg. Polytechnikums und am 27. Dez. die von Herrn Dr. Keller veranstaltete Madagascar-Ausstellung besichtigt.

[Dr. A. Tobler.]

Notizen zur schweiz. Kulturgeschichte (Fortsetzung).

376) Briefe an Gautier. (Forts.)

J. Plana: Turin 1830 XII 10. — Les détails sur Mr. Quetelet m'ont touché. Souvent j'ai pensé à lui, et je le voyais avec chagrin éloigné de sa famille tandis que sa patrie était en armes, pour défendre une cause que les contemporains peuvent nommer comme bon leurs semble, et qui sera jugé avec justice par la postérité. Quoi qu'il en soit, je suis charmé d'apprendre que Mr. Quetelet a retrouvé sa famille en bonne santé, et qu'il est lui-même bien portant. J'espère que ses espérances relatives à l'établissement de l'Observatoire de Bruxelles ne seront pas trompées. En admettant que le peuple belge obtienne un gouvernement à bon marché, il saura faire une distinction sur tout ce qui est à la fois utile et attaché à la gloire nationale. Au reste je me félicite d'avoir fait la connaissance personnelle de Mr. Quetelet, homme distingué par ses talens et par l'amabilité de son caractère. — J'ai fait une absence d'environ un mois: j'ai voulu revoir mon frère et mon ami Oriani. Je me suis rendu à la maison de campagne de ce dernier avec ma femme et ma fille. J'ai trouvé ce respectable vieillard en bonne santé, et je voyais qu'il était fort content de nous avoir chez lui. — Dans ce moment vous avez probablement à Genève Mr. Cauchy et Mr. Libri. Mr. Cauchy est parti d'ici il y a peu de jours, pour aller se fixer à Fribourg, où il deviendra un des fondateurs de la nouvelle Académie; mais j'ignore si un tel projet sera sans obstacles.

Ad. Quetelet: Bruxelles 1831 II 6. — J'ai reçu hier la Bibl. univ. pour le mois de Janvier. Ce recueil continue à être d'un haut intérêt. Je me suis arrêté particulièrement à l'article sur une apparence de division dans l'anneau extérieur de Saturne, *) parceque l'auteur m'avait déjà parlé à Londres de cette singulière observation. Je lui communiquai alors ce que ma mémoire me rappelait à l'égard d'observations qui furent faites à Paris en 1823 (et non en 1815) avec les lunettes qui parurent à l'exposition; observations auxquelles j'assistai. †)

*) Ein Referat über die von Kater in das Phil. Magaz. (1830 XII) eingerückte Nachricht über seine betreffenden Beobachtungen.

†) Vergleiche Quetelet's Brief von 1829 VIII 4.

Je regrette de ne pas avoir pris alors un dessin de l'anneau de Saturne; mais l'idée m'est toujours restée depuis que vous étiez présent à l'observation. Lorsque je vis Mr. Kater en 1827, je lui en parlai dans ce sens, et j'ajoutai que me trouvant le lendemain chez Mr. Bouvard avec vous, Mr. De la Place survint pendant que nous étions ensemble. La conversation roula sur les observations de la veille. Vous fîtes alors la question si les divisions de l'anneau en plusieurs parties étaient favorables aux idées reçues en astronomie sur les propriétés de l'attraction. La réponse fut affirmative. Il fut question encore de divers autres points de la science, et je me rappelle que pour éclaircir un sujet de doute, on eut recours au grand ouvrage de Delambre. Je crois ne pas me tromper sur l'entrevue chez Mr. Bouvard ni sur le sujet de la conversation qui eut lieu: Pour la première fois, je crois, je prenais part à une conversation avec Mr. Laplace et ce sont de ces souvenirs qui ne s'effacent pas. Je n'ose garantir autant pour la veille et je n'oserais assurer, quelles étaient les personnes qui assistaient aux observations, parceque d'ailleurs elles se renouvellaient tous les jours. C'est pourquoi je promis à Mr. Kater de vous en écrire, ainsi qu'à Mr. Bouvard, mais il faut bien l'avouer que j'oubliai ma promesse. *) Seulement lorsque j'eus le plaisir de vous revoir l'année dernière à Genève, je vous parlai de la chose, et il me parut que votre mémoire n'avait pas été aussi fidèle que la mienne. Vous doutiez surtout d'avoir assisté à l'observation d'une double division dans l'anneau. Vous le dirai-je, en voyant depuis dans la Bibl. la citation de Mr. Kater, j'en eus presque du regret; non que ce que j'ai dit à ce savant soit, je pense, inexact en rien. Dieu me préserve de jamais faire un mensonge, surtout dans les sciences. Mais il me semble que quand il s'agit d'une chose aussi importante et qui a été si rarement observée, j'aurais désiré pouvoir produire mieux qu'un souvenir dont certaines parties ont pu s'effacer plus ou moins après plusieurs années, et cependant, comme je le disois, la conversation avec M. Laplace, M. Bouvard et vous est aussi

---

*) An den oben erwähnten Brief von 1829 scheint sich Quetelet nicht mehr erinnert zu haben.

présente à ma mémoire que si elle avait eu lieu depuis peu. Je vous prierai en tout cas de vouloir bien rectifier l'erreur de date, s'il est possible et de dire que l'observation a eu lieu vers la fin de l'année 1823 et non de 1815. J'attacherai beaucoup de prix à cette rectification; j'ose espérer que vous apprécierez le motif de mes scrupules. — Nous continuons à être dans le provisoire, le pire des états. Je fais des voeux bien sincères pour que l'ordre et la tranquillité renaissent chez nous; mais je n'ose espérer tant de bonheur. Les armemens qu'on fait de toutes parts sont de mauvais augurs. On paraissait, il y a huit jours, vouloir reprendre sérieusement les travaux de l'observatoire. On m'a même demandé un projet de règlement.

B. Valz: Paris 1831 III 12. — J'ai bien des excuses à vous faire pour le long retard que je mets à vous instruire des détails, que vous étiez pressé de connaître et que je m'étais chargé de vous transmettre; mais vous pourrez reconnaître qu'il n'y a pas eu de ma faute et qu'il n'a pas dépendu de la bonne volonté que j'y ai mis. La traversée du Jura fut contrariée par un fort mauvais tems et une neige abondante qui nous obligea d'abandonner la voiture pour continuer en traineaux. Dans divers endroits on appercevait à peine les poteaux de la route qui ont douze pieds de hauteur cependant. Le retard éprouvé nous fit manquer le départ des voitures à Dijon, où il fallut séjourner; une forte chute faillit me priver de l'usage des deux jambes, qui par grand extraordinaire n'eurent que des contusions et des écorchures: des enflures leur étant survenues par la suite du voyage j'eus de la peine à gagner l'hôtel ou des parens et des amis m'attendaient et m'accueillirent. Ma retraite forcée fut utilisée par le calcul des élémens de la dernière Comète d'après des observations de Mr. *Rümker,* qui est actuellement à l'observatoire de Hambourg, par suite d'une brouillerie avec Mr. South, qu'il habille fort mal. Il est facheux qu'une pareille cause le prive de retourner vers le ciel austral, où l'on pourra voir seulement la prochaine apparition de la petite comète; car il est fort à craindre qu'elle ne puisse être aperçue en Europe, ainsi que vous pourrez en juger par les élémens suivants qu'en a donné Mr. Encke, et l'éphéméride que je transmets à Mr. Wartmann d'après la demande qu'il m'en

a fait. Vous ne trouverez que quatre jours de différence avec l'annonce que vous en aviez donné.

Passage au Périhélie 1832 V 3, 99093 t. m. Par.

Longitude du Périhélie	157°21′ 2″	Equin. du 4 mai
— du noeud asc.	334 32 5	
Inclinaison	13 22 12	
Angle d'excentricité . .	57 43 6	
Mouv^{t}. moy. sidéral . .	1071′, 09598	

L'orbite de la dernière comète a été fort pénible à calculer à cause du cas défavorable où elle s'est trouvée. Aussi en Allemagne, tandis que les uns la faisaient directe, les autres la trouvaient rétrograde, ce qui est la vérité: cependant l'inclinaison n'est pas assez considérable pour motiver une telle contradiction, — c'est plutôt la faute de mauvaises observations ou de calculs imparfaits. J'avais d'abord employé l'observation du 8 janvier, mais je reconnus par de nouvelles observations qu'il y avait au moins 1° 30′ d'erreur, ce qui est étonnant, l'observation ayant été faite au sextant. Quant à l'opposition de la direction du mouvement Mr. Bouvard m'a dit s'y être mépris en rapportant la position reconnue à Paris. Il n'a du reste observé cet astre qu'une fois au commencement de Février, et je n'ai pu encore y comparer les élémens que j'ai obtenu. Mr. Rümker l'observait cependant le 21 février; comment donc n'avons nous pu la trouver à Genève? D'abord l'ambiguité de la marche, ensuite le mauvais tems, le clair de Lune, et le manque de station favorable avec un tems fort rude:

Passage au Perihélie 1830 XII 27, $7^{h}\,55^{m}$ t. m. Par.

Distance Périhélie	0,13176
Longit. du Périh.	310° 9′
— du noeud asc.	337 41
Inclinaison	43 40

Mouv^{t} rétrograde.

Aussitot qu'il m'a été possible d'aller à l'observatoire je remis votre lettre à Mr. Bouvard, qui me dit que vos instrumens n'éprouveraient guère qu'un retard d'un mois. Il m'engagea de retarder à vous écrire jusqu'à ce qu'il eut essayé vos lunettes. Je le vis ensuite à l'Académie où j'avais été communiquer mes premiers élémens, et de nouveau plus tard encore

à l'observatoire lors d'une assemblée du bureau des longitudes: Il éprouvait sur la croix du Panthéon votre lunette méridienne, qui faisait bien avec un fort grossissement; il devait l'essayer de nuit et m'en dire le résultat le lendemain, mais je n'en ai rien appris. Après avoir été plusieurs fois chez Mr. Gambey sans le trouver, nous convinmes enfin d'un jour et d'une heure avec sa femme, et j'ai fini par le voir hier. Il a reçu vos diverses lettres, et est sur le point d'y répondre. Mais de crainte de retard je l'ai questionné le plus possible, et suis resté plusieurs heures dans ses atteliers avec le plus grand intérest: Ils sont très vastes contenant une vingtaine d'ouvriers et à peine finis de bâtir à neuf. C'est cette nouvelle construction qui retardera vos instrumens d'environ un mois; je les ai vû à peu près terminés, mais non les pièces assemblées. La lunette méridienne a 52 pouces de longueur, et celle de l'Equatorial 45 pouces, avec les ouvertures convenues. La pièce qui doit supporter l'extrémité supérieure de l'axe est en fonte, en plusieurs branches, comme à l'Observatoire. Le fil mobile sera ajouté, avec quelques changemens pour cela. Mr. Gambey ne voit pas d'inconvénient à laisser aux piliers toute leur hauteur. Du reste il aurait l'intention d'accompagner les instrumens pour présider à leur placement si on lui accorde indemnité de route. Je désire que ces divers détails puissent vous satisfaire et suis entièrement à votre disposition pour tout ce que vous pourriez désirer d'ici pendant mon séjour. Je vous prie de vouloir bien présenter mes devoirs empressés à Mesdames Gautier et de Saugy, auprès desquelles je vous serai obligé d'être l'interprête de mes sentimens de gratitude pour toutes les bontés qu'elles m'ont témoigné pendant mon séjour dans votre ville. Agréez également mes témoignages de reconnaissance pour votre accueil si gracieux.

Ad Quételet: Bruxelles 1831 V 2. — J'ai reçu le diplôme de membre honoraire de la Société de physique; j'ai été très sensible à ce nouveau témoignage de bienveillance de la part de vos savans compatriotes. Je désire seulement ne pas m'en montrer trop indigne. — Je vous adresse en même temps que cette lettre un exemplaire de mon mémoire sur l'intensité magnétique en Suisse et en Italie. Vous serez sans doute

étonné de voir ce qu'on obtient quand on calcule l'intensité totale au moyen de la partie horizontale de la force et de l'angle d'inclinaison. Aussi je me défie extrêmement de tout ce que nous avons sur l'intensité totale; je crois qu'il nous manque encore un instrument pour la mesurer. Je vous prierais de me dire ce que vous pensez de celui que je propose quoique la forme n'en soit pas nouvelle; je serais aussi charmé d'avoir l'avis de M. De la Rive et de vos savans amis. C'est un essai sur lequel je compte revenir dans le travail dont je m'occupe sur l'aimantation. Je joins à l'exemplaire que je vous envoie, un second pour la Société de physique ainsi qu'un mémoire sur la croissance de l'homme qui n'est qu'une partie d'un grand travail sur toutes les lois relatives à l'homme, soit pour la croissance, soit pour la force, soit pour le poids, soit pour la vitesse, la capacité des poumons, les inspirations, les pulsations, la mortalité, etc., que je désirerais voir former avec le plus d'observations possibles. Comme il s'agit d'examiner les différens âges et de faire des épreuves multipliées, la vie d'un homme n'y suffirait pas, surtout la mienne puisque j'aurai à m'occuper d'autres objets. Aussi j'ai formé pour cet objet une petite association de physiciens et de physiologistes; nous nous reunissons à des jours déterminés pour réunir et discuter nos observations. Malgré toutes les difficultés que nous éprouvons, je pense que nous obtiendrons des résultats intéressans. Ce sont les instrumens qui fixent particulièrement notre attention dans ce moment. Le dynamomètre de Regnier nous paraît surtout défectueux; il devient inapplicable pour les enfans, qui ne peuvent s'en servir à cause de la petitesse de leurs mains. — L'observatoire de Bruxelles est toujours au même point. La ville dit qu'elle est ruinée et qu'elle ne peut pas achever les constructions. Je tache de faire faire des avances par le gouvernement et j'espère y parvenir. Nous perdons bien du temps. Je pense cependant que je pourrai entrer dans le bâtiment d'ici à quelques mois. Le gouvernement a fait quelques fonds pour payer la pendule de Mr. Kessels et l'instrument de Mr. Gambey; mais il n'y a pas encore moyen de songer au placement. — J'ai suspendu pour quelque temps la publication de la *Correspondance*; j'y reviendrai cependant sous peu.

Al. Bouvard: Paris 1831 V 9. — Les circonstances politiques qui ont eues lieu à Paris depuis le mois d'août dernier, ont été une des principales causes des retards que vous fait éprouver Mr. *Gambey.* Les deux instrumens devaient être achevés au 1er mai de cette année, et vû les évènemens, ils ne seront pas terminés avant le mois d'août prochain, cependant le travail avance, et chaque fois que je vois l'artiste, je ne manque jamais de lui parler de ses engagemens. Les instrumens sont très avancés, je pense que vous pouvez sans inconvénience lui faire payer le premier tiers de la somme, c'est à dire *huit mille francs.* — Si vous éprouvez des retards, vous y avez coopéré par votre correspondance avec lui, en lui accordant des délais avec les artistes. On doit toujours paraître éxigeant avec eux; car autrement ils sont toujours disposés à abuser de la confiance qu'on veut bien leur accorder, souvent trop légèrement. Je pense, Monsieur, qu'en lui faisant payer l'argent qu'il demande, vous devez le sommer de tenir sa parole; car autrement vous serez trompé et vos instrumens éprouveront des retards. — J'ai été bien contrarié de l'absence de Mr. *Maurice,* parceque nous aurions pu ensemble suivre plus assidument l'exécution du traité. Mr. Gambey demeure si loin de l'observatoire (au moins une lieue) que je ne puis y aller souvent. Mr. *Gambart,* qui est à Paris depuis trois mois, y va souvent, et il est fort mécontent des retards qu'il éprouve pour les parties d'instrumens que Gambey doit lui livrer à son départ pour retourner à Marseille. — J'ai examiné avec soin les deux objectifs qui m'ont semblés fort bons. Quant au grossissement de 300 fois, je crois qu'il est difficile de l'obtenir avec 4 pouces d'ouverture et surtout d'un court foyer. Notre Lunette méridienne plus longue que la votre, ne grossira pas plus de 200 fois, et ce grossissement est tout ce qu'il faut pour des instrumens fixes. — La visite du Roi à l'observatoire est des plus heureuses pour nous. Nos cabinets en ruine seront retablis complétement; alors nous pourrons en faire un grand usage. Dans l'état actuel nous ne pouvons pas observer. — Je n'ôse vous assurer de ma présence à Genève à l'époque de l'inauguration de votre observatoire, parceque je ne pense pas que je puisse quitter Paris cette année. — On ma fait espérer que

Mr. Maurice viendra à Paris sous peu; je le désire vivement à cause de vos instrumens.

Ad. Quetelet: Bruxelles 1831 VIII 28. — Je profite d'une occasion sûre que me présente M. Plateau pour envoyer à Paris le petit appareil magnétique que vous m'avez demandé. J'y joins deux excellentes aiguilles qui m'appartenaient et qui depuis près d'un an que je les ai observées, n'ont pas perdu sensiblement de leurs forces. Je les ai essayées avec Mr. Plateau le 23 et le 27 de ce mois. Mr. Plateau m'a promis de les observer encore à Paris dans le jardin de l'Observatoire; il remettra alors l'appareil avec le résultat de ses observations à Mr. Gambey, en lui recommandant expressement le tout. — Je ne crois superflû de vous recommander de toujours remettre avec soin les aiguilles dans leur même position parallèle, en opposant leurs pôles de même espèce, et en prenant les plus grandes précautions, quand vous employez les aiguilles, pour qu'elles ne se touchent pas. J'insiste sur ce point, parceque moi-même j'y ai été pris. A Bonneville, en remettant mes aiguilles. j'ai eu l'imprudence de les laisser se toucher, et j'ai heureusement eu l'idée de recommencer sur le champ mes observations pour juger de la perte de force. Il faut aussi éviter l'humidité, les chocs ou les chûtes, etc. — Notre observatoire en est toujours au même point; on me promet cependant la reprise des travaux comme prochaine. Je vois avec peine tout ce qui se passe ici; nous avons été gouvernés par des gens bien incapables; la dernière catastrophe est bien propre à éclairer notre Roi; il commence de nombreuses réformes; elles ne seront jamais assez grande; notre enseignement est entièrement ruiné. — Quant au reproche que vous me faites sur le mémoire des croissances, il serait fondé sans doute si j'attribuais la constance et la régularité des lois de la nature aux effets du hazard, ce qui est contre ma pensée. Je regarde même ma manière de voir comme si naturelle, que je n'ai pas crû devoir l'exprimer, c'est ce qui fait que vous avez mal interprêté mon silence. C'est parceque je suis convaincu qu'il existe une providence qui fait tout dans les plus justes proportions, et avec la plus grande économie et qui n'abandonne rien à l'arbitraire, que je me suis attaché à pénétrer ses secrets dans

les lois qui président à la conservation et à la propagation de l'espèce comme on le fait à l'égard des autres phénomènes naturels. Je suis faché que vous vissiez dans mon écrit un penchant au matérialisme, parcequ' alors je me serais mal expliqué sur un sujet délicat.

B. Valz: Nîmes 1831 XI 20. — J'aurais bien désiré repasser à Genève à mon retour, mais mon empressement à me rendre à nos élections ne me le permit pas. J'ai à vous prier d'avoir la complaisance de remplir l'engagement que j'avais pris auprès de la société académique, à laquelle vous me fîtes l'honneur de me présenter en lui communiquant par extrait, si elles paraissaient trop étendues, les tentations auxquelles je me suis livré pour expliquer la formation des queues de comète. Pendant mon séjour à Genève j'y ai ajouté tout ce que j'ai emprunté à la Cométographie de Hevelius que je n'avais pû avoir ici; ce qui est venu confirmer après deux siècles la loi des densités de l'èther. L'extrême bonté que vous eûtes de m'expliquer et de me donner l'ouvrage de M. Brandes, m'a permis de citer ses intéressantes recherches, qui sont ce qu'il a de plus favorable au système de l'impulsion. Je désirerais bien en connaître la suite si elle a paru. J'ai encore trouvé à Paris un mémoire du même auteur sur la comète de 1811 dans le Journal de Mr. de Lindenau, et où se trouvent aussi beaucoup de données et de résultats intéressans. Ayant eû de Mr. Bouvard l'éphémeride de Mr. Encke, je calculai les diamètres apperçus de la nébulosité pour la prochaine apparition qui ne se verra guère que dans l'autre hémisphère, et les joignis à mes recherches sur les queues, que je présentai à l'Académie avant mon départ, et dont furent nommés rapporteurs MM. Arago et Poisson. Ce dernier, que je ne connaissais que de réputation, m'accueillit de la manière la plus affectueuse, et dînant chez lui avec Mr. Savari, j'eus l'avantage de faire connaissance avec son aimable famille de demi-origine anglaise. Il s'était chargé du rapport, et depuis mon retour, j'en ai reçu de nombreuses lettres d'observations sur les densités de l'Ether, qui ont donné lieu aux additions que j'ai envoyé successivement à Mr. Wartmann, pour joindre à l'impression des recherches sur les queues, en le priant de vous soumettre le tout, et je serai fort recon-

naissant des corrections que vous pourrez trouver convenable d'y apporter, l'ayant envoyé fort à la hâte. Mr. Poisson vient de m'annoncer qu'il a terminé son travail sur l'action capillaire et qu'il est occupé de la réduction au vide de la longueur du pendule d'après l'idée de Mr. Bessel; mais qu'il va *dire adieu pour quelque tems aux sciences actives* s'étant engagé à une nouvelle édition de sa mécanique presque épuisée, ce qui l'occupera entièrement, Mr. Arago voulant bien se charger du rapport qu'il devait faire; mais les occupations de ce dernier à la chambre, au secrétariat de l'Institut, au Bureau des Longitudes, à l'Observatoire, et indisposé qu'il se trouve en ce moment, ne me permettent pas d'y compter, et m'ont décidé à faire imprimer mon petit travail. Les observations de Mr. Poisson roulaient surtout sur ce que Laplace (Méc. cél. V 139 et Conn. d. t. 1825 p. 317) n'obtenant théoriquement qu'une vitesse de la lumière 700 fois trop petite, en concluait que la densité de la lumière devait fort peu varier. Cela ne me paraissant guère admissible, je le priai de soumettre de nouveau ce point à l'examen, ce qu'il pouvait faire avec bien plus de supériorité qu'un autre, et me méfiant trop de moi-même pour oser l'entreprendre. Cependant il ne le croit sans doute pas convenable puisqu'il continua d'admettre le résultat contesté. Je me vis donc réduit à mes faibles moyens, et je dus en faire l'essai au risque d'échouer, qui me paraissait assez probable, ce qui me privait du meilleur moyen de soutenir et de terminer avantageusement la discussion. Il me parut alors après diverses investigations infructueuses, que Laplace admettait, sans qu'on ne put guère en entrevoir le motif, un fluide idéal, dont les propriétés devenaient en complète opposition à celles de nos gaz, tandis que j'y trouvais au contraire une entière analogie d'après les observations des nébulosités qui avaient établi ma conviction à cet égard. Malgré donc toute l'autorité si justement due à un aussi grand génie, je dus tacher de faire valoir tous les motifs qu'il y avait de ne pas admettre de confiance seulement ses résultats, mais de les discuter, ce qui en effet vint mettre fin aux objections élevées d'abord. C'est alors que j'en fis l'objet d'une addition, et que je parvins à une vitesse théorique de la lumière 10 à 12 fois trop grande, à l'aide des rapports que j'avais

obtenus pour les densités de l'Ether. Il restera à rechercher, si l'on ne put se rapprocher davantage de la vérité, à moins que cela ne tienne, comme je le croirais un peu, quoiqu'il n'en soit pas ainsi de nos gaz, au rapport des capacités de l'Ether, dont Laplace admet la possibilité, mais que rejettent les physiciens. — Le jour où je dînai chez Mr. Poisson, nous fumes le soir avec toute sa famille à l'Observatoire, où l'on essayait les grands objectifs de 12 pouces 3 lignes d'ouverture et 24 pieds de longueur de Lerebours et Cauchoix. Il s'y trouvait un adjoint de Mr. Schumacher, Mr. Niegard (?), qui était venu chercher les étalons des mesures pour leurs opérations géodésiques. Je vis Saturne par l'objectif de Lerebours qui a obtenu la préférence, avec des grossissemens de 300 et 500 fois, faisant un fort bon effet. Il y en avait aussi de 800, 1000, 1200, 1500 et même 1700 fois, mais non pas pour les planètes. J'ai eu l'avantage de faire connaissance chez Mr. Arago de Mr. de Humboldt, qui a bien voulu m'accueillir favorablement, et m'écrit avec trop d'indulgence. — J'ai communiqué la méthode immédiate pour les orbites, dont je vous ai remis les tables, à Mr. *Olbers*, qui dit avoir eu aussi l'idée d'une méthode analogue qu'il envoyait à Mr. Encke, pour la publier, ce dernier devant y joindre des tables, dans l'annuaire de Berlin pour 1832, qui a du paraître à la fin de Septembre. L'auriez-vous reçu et voudriez-vous bien avoir la complaisance de m'en donner les formules. — Mr. de *Zach* devait bien me les transmettre. Mais depuis plus de deux mois, je n'en ai pas de nouvelles, et il doit être en Angleterre. sa dernière lettre m'annonçant qu'il y irait, pour se distraire de la mort de la jeune Duchesse de Gotha, que j'avais eu l'avantage de connaître avec son mari à Paris, dès qu'il serait hors des fers de Mr. Civiale qui venait à lui extraire quatre nouvelles pierres; c'est réellement bien extraordinaire. — Les dernières feuilles des Astr. Nachr. contiennent un travail fort étendu de Mr. *Encke* sur sa comète, où il tient compte de toutes les perturbations, sauf celles insensibles d'Uranus, ce qui pare à l'objection de Mr. Damoiseau (Conn. d. t. 1827, p. 221) que l'influence de l'èther n'est que de l'ordre des perturbations négligées, ce qu'on aurait pu soutenir en effet jusqu'à présent; mais les calculs rigoureux des trois dernières périodes ne le

permettent plus, et donnent plus exactement qu'auparavant le retard, dû à la résistance de l'éther, qui se trouve ainsi réduit de 3 h. 10 m. à 2 h. 40 m. Cette dernière valeur pouvant être admise avec plus de sûreté, pourra donner lieu à des déductions de quelque intérêt; mais Mr. Encke ayant adopté une loi de densité, qui n'est pas celle déduite des observations, il fallait reprendre d'après celle-ci les calculs des résistances. Il dit (Corr. astr. IX 194) avoir suivi directement l'exemple de Newton, ce que je n'ai pu trouver formellement, ce dernier donnant au contraire la vrai loi de décroissement Liv. 2 prop. 22 de ses Principes. Mr. Encke n'avait pas eu égard non plus à la variation des diamètres de la Comète; il était donc convenable de les faire entrer aussi dans le calcul. C'est ce que j'ai tenté d'après le beau mémoire de Mr. Plana (Corr. astr. 13, p. 341), ainsi que je vons en avais témoigné l'intention lorsque vous me fîtes mention de ce travail intéressant. Mr. Plana ne parvient qu'à un résultat moitié de celui de Mr. Encke, sans pouvoir en assigner la cause. Ce dernier veut en donner l'explication dans le mémoire cité (A. N.), mais je n'ai pu la comprendre, peut-être par la difficulté de bien interprêter ses expressions. Si vous n'y trouvez pas de difficulté à l'entendre je vous serais obligé de m'en faire part; mais il me semble que cette différence ne parvient que de la différentiation employée par Mr. Plana (Corr. astr. 13, p. 353) qui double une des données. Croyez-vous que ce soit bien cela. Mr. Encke paraît dire (Corr. astr. 9, p. 192) que Newton a trouvé que l'Ether diminuait l'excentricité et le grand axe, ce que je n'ai pas vu non plus, et appartient plutôt à Laplace ou à Lagrange. Mr. Poisson me dit avoir écrit à Mr. Encke que d'après mon essai sur l'Ether, le volume de la comète diminuant en s'approchant du soleil, la résistance pourrait aussi diminuer, contrairement à ce qu'il suppose, et qu'il est curieux de savoir ce qu'il en pensera; mais je crois lui avoir fait reconnaître qu'il n'en est rien, car les volumes étant inverses aux densités et les résistances comme les surfaces et les densités, elles seront inverses aux diamètres et augmenteront par conséquent avec les densités. — Un accident qui me retient prisonnier depuis plus d'un mois m'a laissé tout le loisir d'appliquer les formules de Mr. Plana. Mr. Ma-

thieu, chargé avec MM. Poisson et Damoiseau du rapport sur la méthode immédiate des orbites, passant ici sans s'arrêter, et ne m'ayant pas trouvé à la maison, je courrus aux voitures et en m'élançant trop vivement à la portière à leur départ je m'écorchai les deux jambes, qui ne sont pas encore assez bien pour pouvoir marcher. J'ai d'abord employé les formules de Mr. Plana telles quelles en développant en série la fonction exponentielle qui exprime les densités. Le décroissement survenu dans ses termes m'avait d'abord fait espérer qu'il ne faudrait pas la pousser fort loin, mais lorsqu'il fallut sommer les termes d'intégration, j'en calculai plus de cent, et poussai jusqu'à la 20me puissance du rayon vecteur, sans la moindre apparence de convergence, ce qui me fit abandonner la chose sans pouvoir en annoncer le résultat dans le mémoire sur les queues que j'envoyai alors à Mr. Wartmann pour le faire imprimer, ne voyant pas d'autres ressources que de recourir aux quadratures dont je redoutais la prolixité; mais je les entreprenais à peine qu'une considération assez simple me permit de revenir sur mes pas pour obtenir une convergence satisfaisante en utilisant en partie les calculs précédens. Vous connaissez, je crois, Mr. Plana; si vous croyez que cela peut l'intéresser, je pourrais lui faire part de mes calculs, d'autant que je serais charmé qu'on put les confirmer. Croyez-vous qu'il connaisse mon essai sur l'Ether, et le lui auriez-vous envoyé; je pourrais lui transmettre un exemplaire des recherches sur les queues. D'après les notations reçues, je suis parvenu après de longs calculs à $\frac{\partial \delta \mu}{\partial t} = 19$; mais ce doit être plutôt $\frac{\delta \mu}{t} = 38$. Mr. Encke par les quadratures, j'imagine, trouve 35. Je ne m'attendais guère à un pareil rapprochement, vu la grande différence de nos hypothèses; mais on doit remarquer que cela n'a lieu que par l'effet d'une espèce de compensation, qui s'est opérée, car Mr. Encke ne suppose réellement qu'un accroissement trop faible de densité, qui diminue bien la résistance, mais il l'augmente d'autre part en ne tenant pas compte du décroissement des diamètres. Mr. Mossotti, qui les fait croître au contraire, je ne saurais d'après quelles données, s'en éloigne aussi bien plus, le rapport devenant alors = 4, quoique les densités paraissent

plus favorables. Comme je n'ai pas les Mém. de la Soc. astron., pourriez-vous me dire s'il a employé les quadratures, par quels motifs et d'après quelles hypothèses il a établi l'augmentation des diamètres, ce que je ne pourrais deviner. Le retard de la période, qui paraît à présent assez exacte, permet de déterminer le rapport des densités de l'Ether et de la Comète, que je trouve d'environ un millionième. Si quelque perturbation sensible permettra jamais une évaluation de la masse de cette comète, et fait connaître ainsi sa densité, on obtiendrait alors celle de l'Ether. Du reste la faiblesse de cette masse pourrait ne permettre que d'en obtenir une limite. — Voilà une bien grande diversité d'objets dont j'ai été entraîné à vous entretenir, et qui pourront peut-être vous importuner, mais dans ce cas n'y ayez aucun égard, et recevez en mes sincères excuses.

Ad. Quetelet: Bruxelles 1832 II 26. — Je profite d'une occasion pour vous donner des nouvelles de mon observatoire et pour vous offrir un opuscule sur l'astronomie. C'est un petit manuel pour les écoles inférieures où je tache de répandre quelques vérités utiles; recevez-le avec indulgence. A propos de manuel d'astronomie, je vous dirai que mon éditeur de Paris se propose de donner une nouvelle édition de l'ouvrage qu'il a imprimé pour moi. Comme vous avez bien voulu en faire usage et prendre quelques notes sur des améliorations à faire, vous m'obligierez beaucoup en me les communiquant. — Je suis enfin entré à l'observatoire, où je me trouve au milieu des ouvriers. On termine l'aile qui me servira d'habitation; je tâcherai ensuite de faire terminer le reste. On est loin d'être favorable aux sciences dans cet instant, et je crois ne devoir qu'à mon activité la conservation de notre bâtiment astronomique. J'ai dû commencer par prendre possession; j'ai fait préparer aussi un cabinet où je pourrai placer une pendule et un cercle répétiteur, mais dans une position assez incommode, car je ne verrai qu'une partie du méridien. J'espère pour cet été faire terminer la grande salle d'observation. J'ai déjà obtenu qu'on acheverait le paiement de l'instrument de Gambey, et je demande en ce moment la pendule de Mr. Kessels qui sera également payée. Quant aux instrumens de Mr. Troughton, ils souffriront quelque retard dans le paiement. Vous ne sauriez croire

les dégouts qu'on éprouve à batailler en faveur des sciences contre des gens qui n'y entendent rien. — Nous terminons notre projet de loi sur la réorganisation de l'enseignement. J'ai été chargé de la rédaction générale. Nous dirons dans l'exposé des motifs quelques vérités utiles qui pourront ici blesser bien des oreilles. Il faut cependant des ménagemens pour ne pas gâter notre taux.

Ad. Gambart: Marseille 1832 IV 28.)* — Je crois toujours que le Bureau ne s'assemble plus, sans cela je lui aurais déjà écrit à l'occasion de mon cercle méridien, sur lequel je ne crois pas devoir garder le silence, comme je l'ai gardé dans le tems sur l'Equatorial de Bélai, qui ne peut me servir absolument à rien; ce n'est point que je veuille dire que le cercle méridien soit dans le même cas, même qu'il soit seulement défectueux. Je n'ai encore aucune donnée pour juger en définitif de son plus ou moins de mérite; mais sans attendre que j'aie à produire des observations, je croirais qu'il serait convenable que j'indicasse dès à présent, un fait que je considère comme une imperfection de construction très réelle. — L'instrument, tel qu'il m'a été envoyé, n'était qu'un instrument d'exposition; tous ses accessoires, pour ainsi dire, étaient à remanier, c'est-à-dire modifier de manière à pouvoir servir; aussi me suis-je aperçu que si je ne voulais commencer les observations que quand tout serait absolument dans l'ordre, il me fallait attendre longtems. J'entrepris donc le 18 février dernier une série d'observations fort grossières, puis qu'il y avait encore une dixaine de secondes d'erreur sur la perpendicularité des deux axes; je n'observais que le Soleil et cela me suffisait pour suivre trois chronomètres égyptiens qu'on m'avait confiés. Ce n'a été que le 9 de ce mois que j'ai ouvert mon nouveau régistre avec l'intention d'apporter dans les observations un degré d'exactitude suffisant pour déterminer le tems absolu, et commencer, autant que me le permettrait ma santé, un examen rigoureux de mon instrument. — Vous connaissez, Monsieur, la construction de cet instrument; vous savez qu'on peut faire varier la position du cercle limbe à l'égard de

*) Ist die an Gautier gesandte Copie eines Briefes von Arago; vergl. den Brief von 1832 VI 2.

l'axe optique de la lunette. J'ai toujours pensé qu'il convenait sous plusieurs rapports de procéder avec ordre et méthode dans ce changement de l'erreur de collimation; dès lors il devenait naturel de commencer à partir du point zéro, c'est ce que j'ai fait, et j'ai dû évidemment remplir cette condition avant de procéder à aucune autre rectification. Or, je n'ai point tardé à reconnaître, que dans la nouvelle position du cercle limbe, la résistance à vaincre, pour faire tourner la lunette, n'était plus la même, selon qu'on allait du Pole vers l'Equateur, ou de l'Equateur vers le Pole. Cette circonstance devenait assez inquiétante, et je fis comme l'on fait toujours quand l'on craint d'acquérir une certitude pénible, — j'ai resté quelques jours sans examiner la chose à fond, me flattant que cette inégalité de résistance pouvait naître du frottement de la pince opposée au cercle ou bien de quelque frottement latéral des rouleaux; mais enfin il m'a fallu renoncer à tout cela et reconnaître que l'inégalité en question était produite par les axes mêmes du cercle. – Pour apprécier la différence de frottement, j'ai dirigé la lunette au Zénith et déterminé la force nécessaire pour faire naître le mouvement, tant vers le Sud que vers le Nord. Cette opération a été répétée avec les erreurs de collimation de 45°, 90°, 135°, etc. Voici la série complète des résultats auxquels je suis parvenu:

Erreur de collimation ou division du limbe amené au Pole.	Force pour abaisser l'objectif vers le Sud	le Nord
0°	4 onces	. . 10½ onces
45	5	9½
90	8	8
135	12	6
180	13½ . . .	. . 3¾
225	12¼	8
270	8½	10
315	5	12

Je n'insiste point, bien entendu, sur la rigoureuse exactitude de ces nombres; il me suffit qu'ils démontrent, et c'est je crois incontestable, que *le frottement de l'axe du cercle limbe sur l'axe fixe du cercle vernier est très inégal.* Quelle sera la consé-

quence d'une pareille imperfection, si l'on n'y remédie pas, sur l'exactitude de l'instrument? Je l'ignore, mais je vous avouerais que je n'en augure rien de bon; du reste il est possible que cela tienne à fort peu de chose; mais dans tous les cas, je ne vois que Mr. Gambey pour y remédier. Le voyage qu'il doit faire à Genève le conduit presque à Marseille; ne serait-il pas convenable de l'engager à y venir? Voila, Monsieur, ce que je vous prie d'examiner et de vouloir bien soumettre au Bureau, s'il y en a un, ainsi qu'à Mr. Gambey, qui devrait lui même être plus que personne porté à la chose. — J'avais oublié de vous dire la raison pour laquelle je n'ai pas reconnu plutôt l'inégalité du frottement, – elle est toute simple: D'abord elle ne pouvait pas se reconnaître tant que le niveau était placé sur le cube central de la lunette, car toute inégalité dans la position verticale, devait être alors attribuée à la position du contrepoids, et remarquez que Mr. Gambey ayant placé son niveau sur le cube, n'a plus été à même de reconnaître l'inégalité. Si en second lieu je n'ai pas soupçonné la même inégalité intérieurement à l'époque où j'ai réduit l'erreur de collimation à zéro, cela tient à ce qu'il s'est trouvé par hazard, que depuis le déballé, cette erreur était restée de 83° 27', point fort rapproché de celui où vous venez de voir que les forces sont égales. J'avais reconnu à la vérité une inégalité dans la position horizontale, mais je n'ai point hésité à l'attribuer à une différence de poids entre les bouts objectif et oculaire et je l'avais corrigé au moyen d'un anneau adapté au bout objectif. La lunette se trouvait donc ainsi équilibrée dans les positions horizontale et verticale et il restait peu de chose naturellement pour les positions intermédiaires. — *Le 4 Mai.* J'ai pensé que sans retourner la lunette, mais en la soulevant simplement de dessus ses supports ou coussinets et l'y reposant doucement, il serait possible qu'elle ne revint point à la direction primitive. D'ailleurs de tous les moyens que l'on peut employer pour un pareil soulèvement, il n'en est point quand il s'agit d'une petite quantité, qui soit moins capable d'agir sur les coussinets, que celui que l'on produit par l'augmentation des contrepoids. J'ai donc soulevé ainsi successivement chacun des tourillons, et j'ai pû reconnaître qu'en effet le plus souvent, le fil ne revenait

plus au même point de la mire. C'est un point bien établi. De même si l'on fait porter chacun des tourillons contre chacune des gardes des coussinets, on modifiera très sensiblement la direction méridienne. Enfin on la modifiera encore en enlevant une rondelle de chacun des contrepoids. Par cette suite de modifications dont aucune n'aurait dû influer sur la direction méridienne, j'étais arrivé cependant à avoir + 6″ de déviation, étant parti de — 3″. Toutefois il m'a paru que la lunette avait après l'enlèvement de deux rondelles des contrepoids une plus grande tendance à revenir à la même position. C'est pourquoi il m'a paru convenable de ne plus rétablir les contrepoids comme ils étaient précédemment, et de laisser la lunette peser de plusieurs Kilogrammes sur les tourillons.

J. Plana: Turin 1832 V 9. — La perte que j'ai faite m'afflige trop profondément pour que je puisse espérer de m'en consoler. Le temps me ramenera à des idées moins tristes; mais désormais la vie aura pour ma femme et pour moi un degré d'amertume qui nous la rendra au moins indifférente. Nous avons perdu tout ce que nous avions de plus cher au monde, et il nous semble que les Décrets de la divine Providence ont été trop rigoureux envers nous. Cependant il faut s'y soumettre et espérer que Dieu nous donnera la force de supporter la douleur. Mon malheur est d'autant plus grand, que je doute fort de l'impossibilité de guérir mon fils de la maladie qui l'a fait périr. Des médecins plus habiles l'auraient peut-être sauvé. Cette idée est accablante pour moi. — Je tâche de reprendre le goût de mes études; je m'occupe de faire mettre ensemble les trois volumes de mon ouvrage pour les livrer enfin au public. Mais vous comprenez bien, mon cher Monsieur, que je ne suis pas disposé pour sentir les illusions causées par les sentimens des auteurs d'ouvrages scientifiques, même en les supposant excellens: Et moi je crois le mien fort médiocre, et son mérite sera d'avoir éclairci la question, et de donner lieu à des théories de la Lune plus conformes à l'esprit de l'analyse mathématique. On cessera de regarder comme bonnes ces théories *numériques* qui n'ont d'autre mérite que d'offrir un résultat plus ou moins conforme à l'observation.

Al. Bouvard: Paris 1832 V 16. — Mr. Gambey est sur son départ pour Genève, il doit partir vendredi prochain. J'ai visité

chez lui vos deux instrumens, qui m'ont paru parfaitement exécutés, et j'ai lieu d'espérer que vous en serez parfaitement satisfait: ils sont partis par le roulage il y a plusieurs jours, et Mr. Gambey sera à Genève à l'époque où ils arriveront à leur destination. — Je regrette bien de ne pouvoir aller cette année en Savoie, surtout à cause de la réunion da la société helvétique; mais ma santé et la reconstruction de nos cabinets exigent que je reste cette année à Paris et si je m'absente un mois dans la belle saison, ce sera probablement pour aller prendre les bains de mer, que les médecins m'ordonnent. La malheureuse maladie que j'ai éprouvée l'année dernière est loin d'être terminée; car je ne puis même pas sortir de chez moi, sans avoir dans ma poche une sonde pour satisfaire aux besoins naturelles. Par suite de cette grave infirmité je n'ose pas m'exposer à un long voyage, crainte d'augmenter la maladie. — Je vous remercie d'avoir eu la bonté de m'envoyer vos observations du passage de Mercure et l'occultation de Saturne. Le tems n'a pas été beau à Paris pour la première de ces observations; à l'entrée le soleil était voilé; le premier bord a été estimé, mais l'observation très douteuse de l'entrée du deuxième bord, quoique le tems fut assez beau; les résultats des différens observateurs discordent sensiblement; le disque de Mercure très noir et rond. Son diamètre sur le disque du soleil a été mesuré avec la lunette à prisme par Mr. Arago, mais je ne connais pas encore ce qu'il a trouvé pour le diamètre de la planète. — Le tems pour l'observation de Saturne a été assez beau; l'entrée sous le bord obscur de la lune n'est pas très concluant, à cause que l'on ne voyait pas le bord obscur de la lune. La sortie a été à près manqué, attendu l'extrême faiblesse de la lumière de Saturne, qui était, comme vous le dites, pâle et plombée. En tout cette observation ne sera pas d'une grande utilité pour la science. — La comète n'a pas été vue par personne, quoiqu'elle ait été cherché par tous les astronomes. Sa proximité au soleil l'a entièrement dérobée aux recherches les plus suivies. Il faut espérer qu'elle sera vue au Cap de Bonne-Espérance.*) — Mr. *Gambey* passe par Lyon et il est probable

*) Bezieht sich offenbar auf die Wiederkehr des Encke'schen Cometen. Bouvard's Hoffnung ging in Erfüllung.

qu'il arrivera mercredi ou jeudi prochain à Genève, et que sous peu votre observatoire sera organisé convenablement. La présence de l'artiste est indispensable pour l'établissement de vos deux instrumens; tâchez de ne pas le garder longtems afin qu'à son retour à Paris, il puisse finir la lunette de Bruxelles, dont Mr. Quetelet attend avec la plus vive impatience.

Al. Bouvard: Paris 1832 VI 2. — Mon neveu désirant aller voir ses parens en Savoie, vous remettra cette lettre, en vous priant d'avoir la bonté de l'accueillir à son passage à Genève, où il restera quelques jours seulement.*) J'espère qu'il trouvera encore Mr. Gambey, car je pense que vos deux instrumens ne seront pas encore entièrement établis. Mon neveu s'occupe depuis quelque tems d'observations astronomiques principalement avec la lunette méridienne. Il profite pour faire son voyage de la reconstruction de nos cabinets, dont les travaux sont commencés. — J'ai pensé que pour éviter à ce jeune homme, qui n'a jamais voyagé, de perdre son argent en route, je vous prie, Monsieur et cher confrère, de lui avancer d'abord *deux cent* francs pour aller chez sa mère, et comme il reviendra à Genève, s'il n'avait plus assez pour revenir à Paris, ayez, je vous prie, la complaisance de lui remettre la petite somme dont il peut avoir besoin, vous m'obligerez beaucoup. Les fonds que vous lui avancerez, seront en à compte sur ceux que vous donnerez à Mr. Gambey, dont je lui tiendrai compte à son retour à Paris. — Je vous prie de présenter mon jeune homme à MM. Maurice, surtout à l'aîné, qui le connait depuis longtems. Soyez assez bon pour le présenter aux autres savans de Genève, etc.

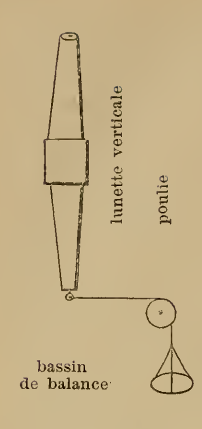
Ad. Gambart: Marseille 1832 VI 2. — Mon cher confrère, depuis que j'ai reçu votre dernière et bonne lettre, je songe chaque matin que je dois vous écrire; mais jusqu'ici je m'en suis tenu là, par la raison que je ne fais que ce à quoi je me crois absolument forcé. Du reste je n'entreprendrai point de me justifier, attendu que je suis fort éloigné de croire que je

---

*) Es ist hier offenbar von dem Grossneffen Eugène Bouvard, später langjährigem Assistenten der Pariser Sternwarte, die Rede, — einem liebenswürdigen Manne, welchen ich 1838 in Paris persönlich kennen lernte.

rentrerai dans des relations suivies ou avec vous ou avec qui que ce soit, excepté avec le père Bouvard. Puisque je ne jouis plus dans ce monde des avantages dont jouissent les autres hommes, il est tout simple que je ne fasse point toujours ce qu'ils font. — Quoique je ne vous aie pas écrit pendant mon séjour à Paris, je ne m'en suis pas moins occupé, chaque fois que l'occasion s'en est présentée, de vos instrumens; nous en avons souvent causé avec Mr. Gambey, et je crois que si votre cercle-méridien est muni d'une pince pour fixer le cercle vernier, c'est à ces causeries-là que vous le devez. Je regarde cette amélioration comme capitale. Dans les trois cercles méridiens, savoir ceux de Paris, Marseille et Bruxelles, le cercle vernier est arrêté tout bonnement par la périphérie. Du reste, M. Gambey, en plaçant la lunette de Paris, a été à même de corriger un assez grand nombre des imperfections qu'il avait laissées dans mon instrument. Le vôtre s'en est heureusement ressenti et tout me porte à croire qu'il doit réellement à peu près rien laisser à désirer. — C'est ce même sentiment qui me guidait à Paris, qui me pousse aujourdhui dans mes derniers retranchemens et me détermine à vous écrire. Je n'ai pas pu le faire dès hier à cause des fatigues de la journée. Mr. Gambey vous avait peut-être déjà parlé de l'inquiétude que j'avais témoignée au Bureau des Longitudes, au sujet d'une chose que je considère comme un vice de construction dans mon cercle. Pour avoir plutôt fini, je joins ici la copie de la lettre que j'écrivis à cette occasion à Mr. Arago, il y a un mois.*) Mr. Bouvard m'a répondu seulement, il y a peu de jours, que l'inégalité du frottement que j'indiquai, ne pouvait tenir suivant Mr. Gambey, qu'à l'épaissement des huiles et à leur inégale distribution dans les axes de mon cercle, qu'en conséquence il n'était point nécessaire que Mr. Gambey vient à Marseille, etc. Cependant je suis assuré maintenant que les huiles ne sont poür rien là dedans, que l'inégalité est très réelle et qu'elle est un fait de construction. Il m'a paru que ceci vous importait beaucoup. Si vous voulez vérifier vos axes, vous le pourrez aisément par le

*) Vergl. den Brief von 1832 IV 28.



moyen que j'ai employé et qui est indiqué par la figure ci-contre; mais il faudra avant tout enlever le niveau placé sur le cube, niveau qui masque par son poids le défaut en question quand il existe. Je crois enfin, qu'il serait bon pendant que vous avez Mr. Gambey, que vous fissiez *réellement* toutes les vérifications et rectifications de vos instrumens, et que même vous observassiez le plus possible. — Je savais bien quand j'ai reçu votre lettre que j'étais fort en retard avec vous, comme avec tout le monde; mais j'étais loin d'imaginer ce que vous me dites au sujet du diplôme que vous m'avez envoyé, — j'en ai sauté sur ma chaise; car j'ai pensé que si je ne vous ai point écrit dans le tems, je n'aurai point probablement non plus remercié la société, et certes c'est là un procédé plus qu'extraordinaire. Que faire à présent? Je suis disposé à faire tout ce qui sera nécessaire pour convaincre la société et vous, à qui je dois la haute marque d'estime qu'elle ma donnée, que je n'ai d'autre tort que celui d'être accablé par la maladie.

Ad. Gambart: Marseille 1832 VI 3. — J'espérai que la difficulté du retournement ne se présenterait plus du moment que je laisserai la lunette peser davantage sur les tourillons. Je devais recommencer la manœuvre après l'occultation de Saturne, mais un nouveau crachement de sang y a mis ordre. Aujourd'hui par un tems favorable, c'ést-à-dire avec une mire tranquille, j'ai voulu reprendre la difficulté. — Avec les nouveaux contre-poids, le cercle étant à l'Ouest, la déviation était de + 6". Le cercle étant à l'Est, c'est-à-dire après le retournement, le fil s'est trouvé à + 8",3 du centre. Donc erreur de l'axe optique $\frac{2'',3}{2} = 1'',15$. Voilà qui est bien. Oui, mais attendons un petit moment, — nous allons remettre le cercle à l'Ouest. Or cela étant fait, le fil est revenu non pas à + 6", mais + 8",3! Evidemment, il n'y a pas moyen de conclure

l'erreur de perpendicularité d'une pareille opération. Je ne suis donc pas plus avancé qu'il y a un mois; la difficulté subsiste pleine et entière avec la nouvelle comme avec l'ancienne pression de la lunette sur ses supports. — Ici, je n'accuse point l'instrument: il est même très probable que le tort est de mon côté; mais je me suis donné tant de peine déjà pour surmonter cette difficulté de retournement, que je n'ose plus compter sur moi seul pour la vaincre. C'est pourquoi je vous engage de toutes mes forces à profiter de la présence de Mr. Gambey. pour faire cette rectification, *mais pour la faire à votre entière satisfaction.* Alors vous pouvez m'aider à me dire en quoi je tombe en faute. Car enfin faut-il bien que je sois en état de rectifier mon instrument. Remarquez bien surtout qu'il ne s'agit point ici d'un à peu près; mais d'une chose aussi excacte que possible. Comme vous avez pû le remarquer je ne touche pas au réticule: ce n'est point proprement la *rectification* de l'axe optique que je fais, mais je cherche à évaluer l'erreur. — Si après avoir mis cercle à *l'Est*, je tâchais par le moyen des vis de prendre la moitié de l'écart, etc., quand je reviendrais cercle à *l'Ouest*, si je ne tombais pas précisément au point où je devais tomber, je dirais: c'est que je n'ai pas bien pris le milieu, c'est si, c'est ça. — Mais en laissant le réticule immuable: il n'y a pas de milieu: il faut revenir après le retournement au point où vous étiez avant. C'est ce retour du fil au même point qui assure votre opération. Sans lui point d'opération assurée. — Je vous recommande particulièrement ce point. Si par hazard vous éprouvez quelque difficulté au retournement faute d'une mire, alors il ne vous resterait d'autre ressources que d'en causer avec Mr. Gambey; mais croyez-moi: tâchez d'aller droit aux réalités. [Fortsetzung folgt unter einer spätern Nummer.]

377) Dass ich meinem unvergesslichen Freunde und Collegen, dem sel. Professor Dr. Friedrich Horner, auch in diesen Notizen ein bescheidenes Denkmal setze, bedarf wohl keiner Entschuldigung, und wenn ich mich darauf beschränke den in allen Beziehungen so trefflichen Nekrolog zu reproduciren, welchen Herr Pfarrer Frick bald nach seinem, am 20. December 1886 erfolgten Tode für die „Allgemeine Schweizer Zeitung" verfasste, [1])

[1]) Er wurde in den Nummern 305 und 306 vom 24. und 28. December abgedruckt.

und ihm nur einige wenige Noten beifüge, so glaube ich ebenfalls nicht irre zu gehen. Herr Pfarrer Frick schrieb:

„*Joh. Friedrich Horner* wurde am 27. März 1831 in Zürich als der Sohn eines geschickten und angesehenen Arztes geboren.[2]) Der hochbegabte Knabe besuchte der Reihe nach die Schulen seiner Vaterstadt und das kantonale Gymnasium, und sein späteres Leben und Wesen lässt erkennen, dass der Wahlspruch des damals an dieser Anstalt wirkenden Professors *Hermann Sauppe* „Sei wahr, und du wirst glücklich sein" auf den Schüler einen bleibenden Eindruck gemacht hat. Im Frühling 1849 bezog er die heimische Hochschule. Prof. *Karl Ludwig*, der damals in Zürich Anatomie und Physiologie lehrte, übte auf ihn den nachhaltigsten Einfluss durch die strenge Forderung exacter Forschung und durch rücksichtsloses Trennen des Sichern vom Zweifelhaften. In seiner Studienzeit trafen ihn zwei schwere Schläge, der Tod seines Vaters und seines ebenfalls sehr befähigten ältern Bruders, welch letzterer sich dem Studium der Philologie ergeben hatte. Nach Absolvirung der medizinischen Examina[3]) ging Horner im Frühling 1854 nach Wien, dann nach Berlin, wo kurz vorher *Albrecht von Gräfe's* Stern durch die Ausgabe des ersten Bandes seines Archivs für weitere Kreise zu leuchten begonnen hatte. Der begeisternde Einfluss dieses genialen Meisters entschied für Horners fernere Lebens- und Berufsrichtung, und die am 24. Nov. 1854 erfolgte Ernennung zum poliklinischen Assistenten bei Gräfe brachte ihn in eine Thätigkeit, welche seine ganze Zeit in Anspruch nahm und ihm in wissenschaftlicher und praktischer Hinsicht umfassende Kenntnisse verschaffte. Bis zum October 1855 blieb Horner bei Gräfe, vom Mai an, als eine heftige Augenentzündung für einige Zeit Schonung befahl, — in freierer Stellung. Die geringe Altersdifferenz zwischen beiden erlaubte von An-

---

[2]) Der Vater, Dr. Salomon Horner, war Neffe des um Wissenschaft und Heimath hochverdienten Hofrath Joh. Caspar Horner, welchen ich als meinen väterlichen Freund und Berather bis zum letzten Athemzuge hochhalten werde. — [3]) Horner promovirte in Zürich am 18. März 1854, und schrieb damals eine Dissertation: „Ueber die Krümmung der Wirbelsäule im aufrechten Stehen. Zürich 1854 in 8", welche er „dem Andenken" s. Vaters widmete.

fang an einen collegialen Verkehr, der sich durch die Begeisterung und den Eifer des Schülers und die Zufriedenheit des Meisters zu einem innigen Freundschaftsverhältniss entwickelte und letzteres dauerte bis zum Tode des geliebten Lehrers und Freundes in gleicher Wärme fort. Gewiss wäre das nicht möglich gewesen, wenn nicht Gräfe in seinem Assistenten neben der ausserordentlichen Begabung und Arbeitskraft auch denselben edlen, hingebenden, menschenfreundlichen Sinn erkannt hätte, von dem er selbst erfüllt war. Horner hat seinem Freunde später ein pietätsvolles Denkmal in einer kurzen Biographie gesetzt, die unter dem Titel „Albrecht de Graefe, un médecin moderne" in der Bibliothèque universelle, Mai 1875, erschienen ist. [4]) — Nach kurzem Aufenthalt in Paris, wo er bei dem berühmten *Desmarres*, Vater, als Freund und Assistent Gräfes auf's Freundlichste aufgenommen wurde, kehrte Horner in seine Vaterstadt zurück und begann daselbst seine ärztliche Thätigkeit, sowie im Mai 1856 die Vorlesungen über Augenheilkunde an der Universität. Beides war rasch von grossen Erfolgen begleitet: in Schaaren drängten sich die Augenkranken zu ihm, und ebenso die Studirenden als begeisterte Hörer. Als im Jahre 1861 der Professor der chirurgischen und ophthalmologischen Klinik, Prof. *Locher-Zwingli*, ein trefflicher Lehrer und Operateur, resignirte, schlug die Facultät einstimmig eine Theilung der beiden Kliniken und die Berufung von Billroth und Horner vor. Freilich ging die Regierung hierauf nicht ein und wählte Billroth allein. Als aber Horner im Jahre darauf einen Ruf an die Stelle von Rau in Bern erhielt, und auch ein Wechsel der Erziehungsdirection stattgefunden hatte, wurde ihm eine eigene klinische Abtheilung am Kantonsspital und die Professur übertragen. — Damit hatte er nun die Stellung erreicht, die ihm gebührte und ihm Gelegenheit gab, seine ausserordentliche Begabung und sein vollendetes, technisches Können

[4]) Diese in der „Revue", nicht in den „Archives", erschienene Biographie s. Lehrers stimmt wesentlich mit einem sog. „Rathhaus-Vortrage" überein, welchen Horner am 26. Februar 1874 gehalten hatte. Schon am 12. Feb. 1860 sprach er auf dem Rathhause über „Das Auge und der Augenspiegel", und dann wieder am 5. Dez. 1867 über „Die Kurzsichtigkeit, ihre Folgen und Ursachen".

durch eine grossartige und aufopfernde Thätigkeit in umfassender Weise fruchtbar zu machen. Es wäre schwer zu sagen, ob er als klinischer Lehrer oder als ausübender Diagnostiker und Operateur Grösseres geleistet habe: denn in beiden Richtungen war er gleich ausgezeichnet. Seine Lehrgabe war glänzend. Wie wusste er mit seinem klaren, lebendigen, oft durch unmittelbare Eingebungen und Einfälle packenden, stets freien Vortrage die Studirenden zu fesseln, für die Wissenschaft zu interessiren und zu begeistern! „Langweilig" war es bei ihm nie, sondern immer eine Freude, ein Genuss und Gewinn, ihn zu hören. So hat er eine ganze Reihe von Schülern herangebildet, welche als Dozenten und Aerzte zu den besten jüngern Vertretern der Augenheilkunde zählen. Wir nennen als Beispiele: *Erismann* den Hygieniker, *Dufour* in Lausanne, *Michel* in Würzburg, *Landolt* in Paris, *Schön* in Leipzig und *Haab* in Zürich, welch' letzterer nun sein Nachfolger an der Universität geworden ist. Auch der Herzog Karl *Theodor* von Baiern, der als Augenarzt eine segensreiche Thätigkeit entfaltet, gehört zu ihnen. Sie waren sämmtlich Assistenzärzte bei Horner, und alle blieben ihm anhänglich und ergeben. — Und wie grossartig wurde dazu seine practisch ausübende Thätigkeit. Mit einer bewundernswerthen Sicherheit und Bestimmtheit erkannte er die Ursachen, den Sitz und die Folgen jedes Augenleidens, und mit seiner festen oder wie er sie selbst etwa nannte, „eisernen" Hand vollzog er mit dem ausgezeichnetsten Geschick und Gelingen die schwierigsten Operationen. Mit weit über 1000 gelungenen Staaroperationen hat er ebenso vielen Menschen das Lebenslicht und die Lebensfreudigkeit wieder gegeben. Vom 1. Januar 1860 bis Ende 1879 wurden bei ihm 68,000 Augenkranke behandelt und im Durchschnitt täglich eine grössere Augenoperation ausgeführt. Seither sind Jahr um Jahr noch je einige Tausend Patienten dazu gekommen. Seit den 1860er Jahren hatte er noch ein eigenes, von einem grossen Garten umgebenes, 45 Betten haltendes Privatasyl, den „Hottingerhof." Bekanntlich spielt eine der Erzählungen Berthold Auerbachs, („Brigitte"), der ebenfalls längere Zeit dort zugebracht hatte, im Hottingerhof. Von allen Seiten, aus der Nähe und Ferne, aus dem In- und Auslande strömten die Patienten seiner enormen

Privatpraxis zu, und zwar Arme und Reiche, vom Tagelöhner bis hinauf zu den Gliedern von Fürsten- und Kaisergeschlechtern der grossen Nachbarreiche. Er verstand es, den Höchstgestellten zu imponiren und die Niedrigsten durch Leutseligkeit oder Kinder durch freundliche Scherze zu gewinnen. Wunderten sich die Einen über sein ausserordentliches Gedächtniss, dass er sie nach vielen Jahren sofort wieder erkannte und mit Namen anredete und sich ihres früheren Zustandes erinnerte, so priesen Andere seine feinen Umgangsformen oder seine Kenntniss des Bedeutenden in der Literatur oder sein treffendes, vom feinsten Scharfblick zeugendes Urtheil über Menschen und Dinge. Auch unter seinen Collegen, in ärztlichen Gesellschaften und Behörden, gab sein stets gewichtiges Votum oft den Ausschlag. Was ihn aber besonders hoch erhob und ihm überall aufrichtige Hochachtung, Verehrung und Dankbarkeit erwarb, das war seine edle Uneigennützigkeit. Viele Tausende armer Patienten hat er unentgeltlich behandelt, und es brauchte oft nur einen leisen Wink, so nahm er auch völlig unbemittelte Kranke, die von Weitem her kamen, in seine Behandlung und Anstalt auf. — Bei allen diesen gewaltigen Leistungen fand Horner noch Zeit, manche Dissertationen und kleinere Aufsätze theils rein klinischen, theils experimentell-pathologischen Inhalts zu schreiben. Eine grössere Arbeit über Augenkrankheiten des kindlichen Alters findet sich im Gerhardt'schen Handbuch. — Es konnte nicht anders sein, als dass ein Mann wie Horner unter seinen Collegen sehr hohes Ansehen genoss. Für den internationalen Aerztecongress in London im August 1881 war ihm ein Ehrenpräsidium angeboten; er wohnte persönlich bei und hielt einen Vortrag über die antiseptische Chirurgie bei Augenkrankheiten. Auch Orden und andere Auszeichnungen wurden ihm zu Theil; doch er behielt jene sorgfältig unter Verschluss und liess nie etwas öffentlich davon hören. Ein gewisses berechtigtes Selbstbewusstsein erfüllte ihn, aber wer ihn für stolz gehalten, hätte ihm Unrecht gethan. Wer für jede kleine Aufmerksamkeit, die man ihm erweist, für jede kleine Freude, die man ihm macht, sich so empfänglich, so dankbar zeigt wie er, der ist nicht stolz, und es zu werden, daran verhinderte ihn sein tiefinneres Bewusstsein, im Dienste eines Höhern zu stehen, wenn

er auch selten davon redete. Ihm mochte das Wort aus dem Herzen und in das Herz gesprochen sein „Nicht Jeder, der zu mir sagt, Herr, Herr, wird in das Reich der Himmel eingehen, sondern der da thut den Willen meines himmlischen Vaters". Dabei achtete er jede aufrichtige, religiöse Ueberzeugung, und nie wurde ein frivoles Wort, nie ein Spott über heilige Dinge aus seinem Munde vernommen. Dagegen war ihm alles Unlautere und Unwahre, alles Schmutzige und Gemeine in tiefster Seele zuwider, und gegen solches konnte er mit beissender Schärfe sich aussprechen und es blutig geisseln. — Ein schöner Zug in Horners Character war auch die Liebe, mit der er an seiner Vaterstadt hing; ohne diese wäre er ihr längst durch Berufung ins Ausland entführt worden. Er gab derselben auch vielfachen, thatsächlichen Ausdruck, so z. B. übernahm er mehrmals die Untersuchung der Augen aller in die ersten Schulklassen eingetretenen Schüler und hielt den Lehrern einen eingehenden Vortrag über das Auge und seine Berücksichtigung und Behandlung in der Schule; seit einer Reihe von Jahren behandelte er die augenkranken Zöglinge des Waisenhauses unentgeltlich und mit grosser Freundlichkeit. Zum Besten dieser Anstalt ist auch das Neujahrsblatt für 1885 von ihm geschrieben: „Ueber Brillen. Aus alter und neuer Zeit." [5])

---

[5]) Horner sandte mir sein Neujahrsblatt, unter Beilegung einiger Notizen über den Pfarrer Hans Jacob Horner (vergl. Nr. 362 dieser Notizen), am 29. December 1884, und schrieb dabei: „Das sind, mein lieber und verehrter College, meine heute wieder mit dem Originale verglichenen Notizen, die ich Ihnen mit meinem Neujahrsblatt zusammen, zu dem Sie ja auch so freundlich und dankenswerth beitrugen, übermache. Mit den herzlichsten Wünschen für den Jahreswechsel bleibe ich Ihr aufrichtig ergebener Horner." Mit diesen Beiträgen verhält es sich nun folgendermassen: Als Horner, der Mitglied der sog. „gelehrten Gesellschaft" war, an die Reihe kam ein „Neujahrsblatt zum Besten des Waisenhauses in Zürich" zu schreiben, und als Thema „Die Brillen" wählte, consultirte er mich über einige historische Fragen, und wünschte ganz besonders zu erfahren, wann die ersten Concavgläser in Gebrauch gekommen seien, — wofür ihm damals jeder Anhaltspunkt fehlte, da er auf allen Darstellungen nur Lesegläser fand, und auch das in dem berühmten Raphael'schen Bilde Leo X in die

Eben dahin gehört, was er für das Kinderspital gethan. Mit höchst glücklicher Wahl hatte im Jahre 1868 der erste Donator und Stifter des Instituts, Dr. C. Cramer in Mailand, Horner an die Spitze der Männer gestellt, denen er die Sorge übertrug, die Anstalt nun wirklich in's Leben zu rufen. Horner rechtfertigte dies Vertrauen im vollsten Masse und machte sich in Gemeinschaft namentlich mit seinem Freunde Landolt und Andern, mit Freude und Energie an die Arbeit. Ihm ist insbesondere die vorzügliche medizinische Einrichtung und Organisation der Anstalt zu verdanken. Bis 1882 blieb er als Präsident des Comité an ihrer Spitze und förderte mit Rath und That ihr Gedeihen. — Es ist fast unbegreiflich, wie er neben aller dieser ungeheuren und vielseitigen Thätigkeit noch Zeit übrig hatte für seine Familie und seine Freunde. Im Jahr 1864 hatte er sich mit einer Tochter des Nationalrathes Wolfgang Henggeler von Unter-Aegeri verheiratet, und aus dieser glücklichen Ehe gingen eine Tochter und ein Sohn hervor. Es eignet sich nicht für eine öffentliche Besprechung, näher auszuführen, was er ihnen war. Aber das darf man sagen: Er war ein musterhafter, treuer, innig liebender Gatte und Vater, und er wirkte mit seinem eigenen Wort und Thun und mit ebenso grosser Liebe als Einsicht wesentlich mit zur Erziehung seiner Kinder. — Zu seinen Freunden gehörten nicht bloss Fachgenossen, sondern Leute aller Facultäten und auch Kaufleute, Industrielle u. s. w., und wen er einmal in's Herz geschlossen, dem hing er mit unveränderlicher Liebe und Treue an. Es war ihm eine willkommene Erholung, wenn er sich von seiner Arbeit etwa losmachen und in ihren Kreis eintreten konnte, in welchem er sich dann als das belebendste Element erwies. Was

Hand gelegte Glas als ein solches betrachtete. Ich war nun so glücklich in Kästner's Geschichte der Mathematik (II 244 u. f.) den sichern Beweis dafür zu finden, dass Leo kurzsichtig und jenes Glas ein Concavglas war, und konnte diess Horner noch zu guter Zeit mittheilen, so dass ihm möglich war die bereits redigirte Stelle so umzuschreiben, wie sie jetzt auf pag. 14 des Neujahrsblattes zu lesen ist. Ich erwarb mir dadurch das kleine Verdienst ihn vor einem Missgriffe bewahrt zu haben, — aber das ist auch so ziemlich Alles, was ich zu s. Neujahrsblatte beitrug.

war es für ein Genuss, wenn er da in seiner feurigen und entschiedenen Weise über diese und jene bedeutenden Persönlichkeiten sprach, deren er so merkwürdig viele kannte, oder wenn er in irgend einer heitern oder ernsten Discussion seinen Witz und seine Schlagfertigkeit spielen liess.[6]) — In dieser Weise hatten sich das Leben und die Thätigkeit dieses Mannes durch Jahrzehnte hindurch fortbewegt. Es ist klar, dass eine gewaltige, unermüdliche Arbeitskraft dazu gehörte, und dass ihm eine grossartige Energie innewohnen musste, um alles zu bewältigen und sich stets wieder frisch und aufrecht zu erhalten. Allein auch der Stärkste vermag eine so grosse Arbeitslast nicht immerfort zu tragen. Im Herbst 1885 kam er schwer krank von Baden-Baden heim: ein Herz- und Nierenleiden hatte ihn ergriffen, das ihn lange zwischen Tod und Leben schweben liess. Die Aerzte hatten sehr wenig Hoffnung mehr. Doch trat allmählig und zur allgemeinen Ueberraschung und Freude eine Wendung zum Bessern in dem Befinden des allverehrten Mannes ein,[7]) und ein längerer Aufenthalt in dem schönen

---

[6]) In Zürich sahen wir uns selten, da wir Beide auf ziemlich verschiedenen Wegen unsern Geschäften nachzugehen hatten; dagegen traf ich mehrfach mit Horner in Interlaken zusammen, wo wir uns nicht nur Abends ziemlich regelmässig im Kursaal sahen, sondern häufig gemeinschaftliche Spaziergänge und Ausflüge machten. Namentlich ist mir in dieser Beziehung das Jahr 1876 in freundlicher Erinnerung, wo uns eine ganze Folge schönster Herbsttage zusammen nach Grindelwald, auf den Abendberg, auf die Schönegg, nach Habkern, auf Mürren, in die Schweizer-Heimat zu dem originellen Ernst Abegglen, etc. zu fahren und zu gehen erlaubten. — Auch noch aus spätern Jahren wäre manches zu erzählen; aber ich will nur noch das Eine erwähnen, dass uns Horner einmal (ich glaube es war 1884) auf der Heimwehfluh einholte, um dort mit uns den Sonnenuntergang zu geniessen: Er war rasch gegangen, — hatte sich erhitzt und eine ziemlich scharfe Bise nicht beachtet, — war sorglos mit uns heimgekehrt, und hatte versprochen uns am folgenden Tage zu einem grössern Spaziergange abzuholen; aber statt seiner kam ein Zettelchen, auf dem wir lasen: „Ein steifer Kerl ist Fridolin, — Und in der Furcht vor mehr, — Gibt er sich ganz der Ruhe hin, — Im Hotel Belvédèr.“ — [7]) Horner nahm damals wieder an Allem Interesse, und verdankte mir z. B. am 3

Interlaken stärkte die wiederkehrenden Kräfte so,[8]) dass er nach seiner Heimkunft an die Wiederaufnahme seines Berufes, wenn auch in beschränkterem Umfange, denken und wirklich gehen konnte. Zwar seine Professur hatte er während der Krankheit niedergelegt; aber ohne dass er es suchte, kamen wieder immer mehr Patienten zu ihm, er musste seine Audienzstunden wieder aufnehmen, und der Hottingerhof füllte sich. Er selbst hatte neue Lebenshoffnung und freute sich jeden Tag von Herzen über alles, was ihm wieder zu arbeiten vergönnt gewesen und gelungen war. Es schien fast, als wolle noch einmal eine längere Periode segensreicher Thätigkeit für ihn beginnen. Da traf ihn Mittwoch Abends den 15. December mitten im Kreise seiner Familie und im heitern Gespräch mit ihr ein Hirnschlag. Er erkannte sofort was es war und was daraus folge. Eine volle Viertelstunde war es ihm noch vergönnt, zu sprechen und von den Seinigen Abschied zu nehmen, dann trat Lähmung der rechten Seite und der Zunge, später

---

Mai 1886 die Uebersendung eines Abdruckes der Notiz (Nr. 374), welche ich über seinen kurz vorher verstorbenen Vetter, den Oberbibliothekar Dr. Jakob Horner, geschrieben hatte, in Beziehung auf dessen Nachlass beifügend: „Ich habe theils noch zu Bett, theils im warmen Zimmer, die Correspondenz, die mir hinunter gesandt wurde, durchgesehen. In seiner eigenen ist fast nichts von Bedeutung. Dagegen ist diejenige (s. Vaters) des Inspectors zum Theil recht interessant; auch von Dr. Ludwig Horner ist sehr viel da. Ganz gewiss sind aber Lücken: z. B. die Briefe von Kunstmeyer (Stäfa-Weimar), u. a. fehlen. Leider kann ich nicht selbst nachsehen, und in der Verwandtschaft hat Niemand, ausser mir, litterarisches Interesse.“ — [8]) Samstag Abend den 11. Sept. 1886 in Interlaken angelangt, führte mich Sonntag Morgens mein erster Ausgang ins Belvédère um Horner zu besuchen, der schon seit einigen Wochen dort wohnte: Ich hatte ihn seit seiner Krankheit nicht gesehen, und fand ihn über Erwarten wohl und munter. Ich sah ihn in den folgenden Tagen dann noch mehrmals, sogar einmal Abends im Kursaale mit einer Cigarre, und machte auch einige kleine Gänge mit ihm; er schien von Tag zu Tag kräftiger zu werden, und ich gab mich damals wirklich ebenfalls der Hoffnung hin, er sei uns wieder auf längere Zeit neu geschenkt. Es sollte leider nicht sein!

auch Bewusstlosigkeit ein, und Montag den 20. Dec. Vormittags war dieses reiche Leben erloschen. Eine allgemeine Trauer herrschte in Zürich, und wie gross und aufrichtig die Theilnahme und Verehrung war, die bis in weite Kreise des Auslandes hinein herrschte, davon gaben zahllose Zeichen und Sendungen, insbesondere aber sein Leichenbegängniss, an dem Tausende aus der Nähe und Ferne theilnahmen, Zeugniss. Tausende werden ihm auch ein dankbares Andenken bewahren. Möge Horner mit seinem grossen und lautern Character, mit seiner ernsten und freudigen Hingebung an seinen Beruf; mit seinem unermüdlichen Wirken und Arbeiten, so lange es für ihn Tag war, und mit seiner steten edlen und uneigennützigen Hülfsbereitschaft ihnen auch ein lebendiges Vorbild bleiben!" †)

378) Seit ich in Nr. 373 eine kurze Notiz über Professor Johannes Orelli gegeben habe, ist der Bibliothek des Polytechnikums nach dessen letztwilliger Verfügung der grösste Theil seiner an mathematischen Werken reichen Büchersammlung zugekommen, so dass der Verstorbene noch auf lange hinaus an der Anstalt fortwirken wird, welcher er seine letzten Jahre widmete. — Indem ich dem Frühern diese kleine Ergänzung beifüge, benutze ich gerne die mir dadurch gebotene Gelegenheit, auf Orelli zurückzukommen, um nicht nur zu bekennen, dass ich mir in jener frühern Notiz theils einen Irrthum, theils eine Auslassung zu schulden kommen liess, sondern auch um das Nöthige zu verbessern und nachzutragen: Für's Erste ist nämlich zu berichtigen, dass Wilhelm Denzler nicht nach Orelli's Eintritt ins Seminar Küssnacht, sondern beinahe ein Jahr vorher Lehrer an dieser Anstalt wurde. Für's Zweite bezog sich in dem Nekrologe Orelli's, welcher in der N. Z. Zeitung erschienen war und den ich für meine Notiz benutzte,*)

---

†) Während vorstehende Notiz abgesetzt wurde, liess Herr Dr. Th. Bänziger jun. in der N. Z.-Ztg. von 1887 III 31 — IV 3 sehr lesenswerthe Artikel „Zum Gedächtniss Prof. Friedrich Horner's" erscheinen, auf welche ich hier für manchen weitern Detail verweise.

*) Ich habe erst seither erfahren, dass jener Nekrolog Herrn Prof. Autenheimer zum Verfasser hatte; hätte ich es damals gewusst, so würde ich nicht verfehlt haben, meine Quelle anzuführen.

folgender Passus auf dessen Besuch des Schweiz. Polytechnikums im Schuljahre 1857/58: „Hier fand er seine Befriedigung nicht, weil der vorzügliche Mathematiker Raabe krank war, und schon 1858 seine Entlassung nahm, sodann weil der Mathematiker Aug. Beaumont eben resignirte und sein Amt einige Jahre aushülfsweise verwaltet wurde. Desshalb ging er oft nach Küssnacht, um bei seinem frühern Lehrer **Denzler** wissenschaftliche Nahrung zu holen“. Während ich nun den ersten Theil dieses Passus fast eher noch verschärfte, liess ich den letzten Absatz ganz weg, weil er mir nur ein Privatverhältniss zu betreffen schien, und ich den Einfluss des frühern Lehrers schon im Eingange hinlänglich betont zu haben glaubte. Hätte ich damals eine Ahnung davon gehabt, dass Orelli in Küssnacht nicht blosse Besuche machte, sondern von Denzler regelmässigen Unterricht in der Differential- und Integralrechnung erhielt, der ihm den am Polytechnikum vergeblich Gesuchten ersetzte, ja bei diesem Unterrichte so viel Belehrung fand, dass er sich im Herbst 1860, wo er bereits als Hauptlehrer am Vorkurse Stellung am Polytechnikum genommen hatte, noch eine Fortsetzung desselben erbat, welche sodann bis Anfang 1864 fortdauerte, — so hätte ich ganz sicher jenen Absatz nicht nur nicht weggelassen, sondern noch bedeutend erweitert.

379) Herr Pfarrer Henri Rapin in Lausanne hat mir auf meinen Wunsch hin schon vor längerer Zeit von der Familie des verstorbenen Oberforstinspectors Saussure einge Notizen über denselben erbeten und übersandt, welche ich hier zu seinem Andenken einreihen will: Adolphe de Saussure wurde 1807 zu „Jouxtens près Lausanne“ geboren und starb 1880 zu Lausanne. Er trat schon mit 21 Jahren in die Forstadministration des Cantons Waadt ein, war zuerst „Inspecteur forestier“, dann „Inspecteur général des forêts“, und bekleidete letztere Stelle bis ein Jahr vor seinem Tod. Zur Erholung von seinen Amtsgeschäften beschäftigte er sich gerne mit Astronomie und fand dabei die merkwürdige Beziehung, dass das Quadrat der Umlaufszeit eines Planeten 32 mal so gross ist als das Quadrat der Zeit, welche der Planet beim Erlöschen der Tangentialkraft brauchen

würde, um auf die Sonne zu fallen. Er legte die betreffende Untersuchung in einem autographirten Mémoire nieder, welches den Titel „Recherches sur la rotation des planètes“ führt, und vom 21. Juni 1868 datirt ist.

380) Dem 1805 VII 2 zu Lengnau gebornen und 1886 X 24 zu Zürich verstorbenen, um unsere zoologische Sammlung hochverdienten Johannes Widmer errichtete Herr Professor Dr. Gustav Schoch in der N. Z. Zeitung vom 13. November 1886 folgendes ehrenvolle Denkmal:

„Vor Kurzem starb, 81 Jahre alt, der älteste Angestellte der zürcherischen Hochschule und des eidgenössischen Polytechnikums, Johannes Widmer, Präparator an der zoologischen Sammlung. Wenn ein Mann volle fünfzig Jahre mit solcher Hingabe und Bescheidenheit an einem öffentlichen Institute wirkte, wie der Verblichene, darf ihm ein ehrendes Andenken nicht verweigert werden; denn nicht die Stufe der Rangleiter, auf welcher der Einzelne steht, erweckt unsere Theilnahme, sondern die Pflichttreue und der persönliche Charakter bildet für uns den Masstab der Werthschätzung. — Es ist doch etwas ganz eigenthümliches um jene immer seltener werdenden Menschen, die nur einem intensiven, inneren Triebe folgen, trotz allen Hindernissen ihren Beruf erkämpfen müssen. Man kennt sie sofort vor den gewöhnlichen Berufsmenschen an der ungeheuchelten Begeisterung für ihr Fach, und das ist es, was den Umgang mit ihnen so anziehend macht. — Ein solcher Autodidakt in des Wortes bester Bedeutung war nun der alte Widmer in der That, Ausstopfer nnd Naturbeobachter aus Leidenschaft, nicht aus Profession. Es mögen bessere Techniker später seine Stelle ausfüllen, den Besuchern des Museums wird stets der alte freundliche Mann fehlen, dessen bescheidene und gefällige Weise Jedem bekannt war, welcher mit dem Museum verkehrte, und dessen Interesse sich in oft rührender Weise zum Enthusiasmus steigerte, wenn er einem die dort angesammelten Schätze vorführen konnte. — Wie schwierig es Widmer wurde, seinen Lieblingsberuf zu erkämpfen, darüber geben einige selbstgemachte Aufzeichnungen Aufschluss: Als Knabe schon begleitete er seinen Vater, einen Landwirth im aargauischen Dorfe Lengnau, der nebenbei eifriger Jäger war, in Feld und

Wald, und fand sowohl am Waidwerk als besonders an genauer Beobachtung der Thiere grossen Gefallen. Bald lernte er den Gesang aller Vögel und die Lebensweise und Stellung des Wildes kennen. Im siebenzehnten Jahre kam er als Jägerbursche zu Forstmeister Gehret und trat ein Jahr später in den Dienst des polnischen Flüchtlings Grafen Radonzky, der damals sich in Aarau aufhielt. Dieser alte Husarenoberst, der unter Napoleon den russischen Feldzug mitgemacht hatte, war ein leidenschaftlicher Jäger. Er fand an dem jungen und anstelligen Widmer Gefallen, nahm ihn mit sich auf sein Landgut in Lugano und versprach, für ihn bleibend zu sorgen. Während der acht Jahre seines Aufenthaltes auf der Südseite der Alpen lernte Widmer besonders die Zugvögel kennen. In Lugano sah er auch zum ersten Male ausgestopfte Thiere, und sie reizten ihn so, dass sein Entschluss feststand, diese Kunst zu lernen. Aber nirgends fand er darin Anweisung. — Nach dem plötzlichen Tode Radonzky's, den Widmer wie einen Vater liebte, kehrte er nach Aarau zurück und trat in den Dienst des Dr. Rengger, den er auf seinen wissenschaftlichen Reisen begleitete. — Damals lebte in Aarau zwar ein Präparateur, der aber dem jungen Widmer seine Bitte, bei der Arbeit zusehen zu dürfen, rundweg abschlug, ja sogar die in Arbeit befindlichen Stücke sofort mit Tüchern zudeckte, sobald Widmer in das Zimmer trat. Da blieb nichts übrig, als sich selber zu helfen. Widmer kaufte einige ausgestopfte Vögel und suchte auf das Geheimniss dieser Technik zu kommen, indem er sie sorgfältig auftrennte, und was er gesehen verwerthete. Durch Dr. Rengger wurde er an Prof. Schinz in Zürich empfohlen. Dieser berühmte Ornithologe verschaffte im Jahre 1836 dem strebsamen Manne die neu errichtete Stelle eines Präparators an der Universität Zürich, die er von nun an bis zu seinem Tode mit grösster Gewissenhaftigkeit ausfüllte. — Das Resultat seiner rastlosen fünfzigjährigen Thätigkeit ist zum grossen Theil das Museum des eidgen. Polytechnikums, eine Zierde für die wissenschaftlichen Institute Zürichs. S'ist wahr, es gibt grössere und reicher dotirte Museen, es gibt auch kleinere mit schöner präparirten Thieren (z. B. St. Gallen), aber es gibt wohl kein liebevoller verwaltetes, denn Widmer hing mit kindlicher Freude an jedem der zahl-

losen Exemplare, kannte von jedem Namen, Herkunft, Preis, biologische Einzelheiten, ja sogar Mängel, und war ganz glücklich, wenn er die Besucher mit solchen Erinnerungen unterhalten durfte, und das bedingte eben seine allgemeine Beliebtheit. In früheren Jahren hatte Widmer auch recht hübsch Insekten präparirt und manche Raupe gezogen, die sonst Niemand zu finden wusste. Das hat uns immer gewundert, denn die Behandlung der Schmetterlinge erfordert eine pedantische Reinlichkeit, die wenig mit dem schmierigen und gar nicht gefahrlosen Geschäft des Ausstopfens zusammenstimmt. — Ein schleichendes Herzleiden und das Alter haben den guten Mann in den letzten paar Jahren an das Zimmer gebunden, aber auch dann liess ihm das Interesse an der Sammlung keine Ruhe, er wollte stets sehen, was neues angeschafft wurde und wie er sich nützlich machen könne. Er liess sich in der Droschke hinführen, um seine Lieblinge zeitweise zu besuchen. Vor einem halben Jahr noch brachte er bei seinem letzten Besuche als Geschenk das zierliche Skelett eines Fleckensalamanders, das er in seinem Schaffensdrang als letzte Arbeit zu Hause präparirt hatte. Noch in seinen Fieberträumen hörte er stets seine lieben Vögel singen und konnte nicht genug von deren Farbenpracht erzählen. — Widmer schlief ruhig ein, um nicht mehr zu erwachen den 24. Oktober 1886; er war ein braver Bürger, ein pflichttreuer, unermüdlicher Arbeiter, in seinem Wirkungskreise von unschätzbarem Werthe und von Allen, die ihn kannten, geliebt und geachtet."

[R. Wolf.]



